

Die flache Kugelschale mit elliptischem Kern unter konstantem Druck

Abd El Wahab, Hassan Atif

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 16, 1964,
S.23-61



Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Die flache Kugelschale mit elliptischem Kern unter konstantem Druck

Von Hassan Atif Abd El Wahab, Kairo

Vorgelegt von A. Pflüger

(Eingegangen am 13. 7. 1964)

Übersicht: Es werden die Spannungsstörungen berechnet, die im Membranspannungszustand einer flachen Kugelschale unter konstantem Druck entstehen, wenn die Schale mit einem elliptischem Kern versehen wird. Die in elliptischen Koordinaten formulierten Differentialgleichungen der Biegetheorie der flachen Kugelschale werden mit *Mathieu*-schen Funktionen gelöst. Als Sonderfälle werden der starre Kern und das Loch behandelt.

Summary: Calculated are the perturbations of stresses which arise in a shallow spherical shell under constant pressure, with an original membrane state of stresses, when the shell is provided with an elliptic core. The differential equations of the bending theory of shallow spherical shells in elliptic coordinates are solved by Mathieu-functions. The special case of rigid core and hole are treated too.

1. Allgemeines

1.1 Einleitung

Die Lösung des Spannungsproblems der unendlich ausgedehnten Scheibe mit elliptischem Kern wurde 1960 von *G. Kaiser* [4] gegeben. Es werden jedoch auch bei Schalen ellipsenförmige Verstärkungen verwendet, die z. B. zur Verteilung örtlicher Krafteinleitungen dienen können (Pratzenbleche). Eine Erweiterung der Scheibenlösung für Schalen ist daher wünschenswert.

In der vorliegenden Arbeit*) wird das Problem der flachen Kugelschale mit elliptischem Kern unter konstantem Druck untersucht (Abb. 1). Ausgehend von den Gleichungen der allgemeinen Schalenbiegetheorie werden die benötigten Differentialgleichungen für die flache Kugelschale hergeleitet. Diese Gleichungen werden auf ein in der Mittelfläche der Schale liegendes elliptisches Koordinatensystem bezogen und unter Verwendung *Mathieuscher* Funktionen gelöst. Es wird vorausgesetzt, daß die vom Kernrand ausgehenden Störungen (nach *St. Venant*) mit wachsender Entfernung vom Kern abklingen. Ferner soll die Schalenstärke gegenüber dem größten Kerndurchmesser klein sein und die Verstärkung des Schalenkerns symmetrisch zur Schalenmittelfläche angeordnet sein. Der allgemeine Fall des elastischen Kerns und die beiden Sonder-

*) Eine von der Fakultät für Bauwesen der Technischen Hochschule Hannover genehmigte Dissertation. Referent: Prof. Dr.-Ing. habil. A. Pflüger, Korreferent: Dr.-Ing. D. Withum.

fälle des Loches und des starren Kerns werden getrennt behandelt. Außerdem wird ein Vergleich mit den Grenzfällen der Scheibe mit elliptischem Kern und der Kugelschale mit Kreiskern durchgeführt.

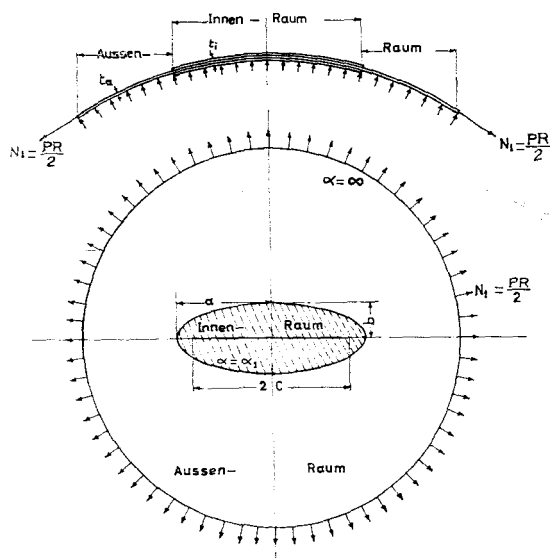


Abb. 1. Flache Kugelschale mit elliptischem Kern unter konstantem Druck

1.2 Bezeichnungen und Abkürzungen

R	Radius der Kugelschale,
t	Schalenstärke,
E	Elastizitätsmodul,
G	Schubmodul,
ν	Querkontraktionszahl,
$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$	Biegesteifigkeit der Schale,
a, b	Halbachsen des elliptischen Kerns; $a > b$,
$2c$	Brennpunkt Abstand; $c = \sqrt{a^2 - b^2}$,
λ, β	beliebige orthogonale Koordinaten, z. B. elliptische Koordinaten,
x, y	kartesische Koordinaten,
r, θ	Polarkoordinaten,
A, B	Koeffizienten der ersten Grundform der Schalenmittelfläche,
k_1, k_2	Hauptkrümmungen der Schale,
X, Y, Z	Komponenten der Flächenbelastung,
N_1, N_2	Längskräfte,
S_1, S_2	Schubkräfte,
Q_1, Q_2	Querkkräfte,
M_1, M_2	Biegemomente,
M_{12}, M_{21}	Drillmomente,

$\bar{S}, \bar{Q}_1, \bar{Q}_2$	Randscherkräfte,
u, v, w	Verschiebungen der Schalenmittelfläche,
$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega$	Verzerrungsgrößen,
$\varkappa_1, \varkappa_2, \tau$	
Θ	Volumendehnung,
χ	Normalendrehung,
$\sigma_\alpha, \sigma_\beta$	Längsspannungen,
$\tau_{\alpha\beta}, \tau_{\beta\gamma}, \tau_{\gamma\alpha}$	Schubspannungen,
K	Gaußsches Krümmungsmaß,
$ce_m(z, h^2), se_m(z, h^2)$	Mathieusche Funktionen ganzer Ordnung erster Art,
$cer_m(z, h^2), cei_m(z, h^2)$	Real- und Imaginärteile der Funktionen $ce_m(z, h^2)$ und $se_m(z, h^2)$ für imaginäre (h^2),
$ser_m(z, h^2), sei_m(z, h^2)$	
$Ce_m(z, h^2), Se_m(z, h^2)$	modifizierte Mathieusche Funktionen erster Art,
$Cer_m(z, h^2), Cei_m(z, h^2)$	Real- und Imaginärteile der Funktionen $Ce_m(z, h^2)$ und $Se_m(z, h^2)$ für imaginäre (h^2),
$Ser_m(z, h^2), Sei_m(z, h^2)$	
$Me_m(z, h^2), Ne_m(z, h^2)$	modifizierte Mathieusche Funktionen dritter Art,
$Mer_m(z, h^2), Mei_m(z, h^2)$	Real- und Imaginärteile der Funktionen $Me_m(z, h^2)$ und $Ne_m(z, h^2)$ für imaginäre (h^2),
$Ner_m(z, h^2), Nei_m(z, h^2)$	
$J_n(z), H_n(z)$	Besselsche und Hankelsche Funktionen,
$Jer_n(z), Jei_n(z)$	Real- und Imaginärteile der Funktionen $J_n(z \sqrt{i})$,
$Her_n(z), Hei_n(z)$	Real- und Imaginärteile der Funktionen $H_n^1(z \sqrt{i})$,
$\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$	Laplacescher Operator.
$g' = \partial g / \partial \beta, \quad f' = \partial f / \partial \alpha, \quad c_n = \cos n\beta,$	
$s_n = \sin n\beta, \quad C_n = \cosh n\alpha, \quad S_n = \sinh n\alpha.$	

1.3 Mathematische Hilfsmittel

Im folgenden werden die für diese Arbeit notwendigen mathematischen Hilfsmittel aus [5], [6] und [9] zusammengestellt. Die Mathieuschen Funktionen mit rein imaginärem Argument (h^2) werden für den vorliegenden Verwendungszweck neu definiert und ihre Entwicklungsformeln abgeleitet.

1.3.1. Flächentheoretische Grundlagen

Für eine beliebige Fläche mit beliebigen orthogonalen Koordinaten (Abb. 2) gilt

$$ds^2 = \overline{ab}^2 + \overline{bc}^2 = ds_1^2 + ds_2^2 = A^2 d\alpha^2 + B^2 d\beta^2. \quad (1)$$

Die Koeffizienten A und B sind vom Koordinatensystem abhängig. Bei kartesischen Koordinaten (x, y) ist $A = B = 1$. Allgemein lassen sich die Koeffizienten aus den folgenden Gleichungen bestimmen

$$\left. \begin{aligned} A^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)^2 \\ B^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial \beta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (2 \text{ a, b})$$

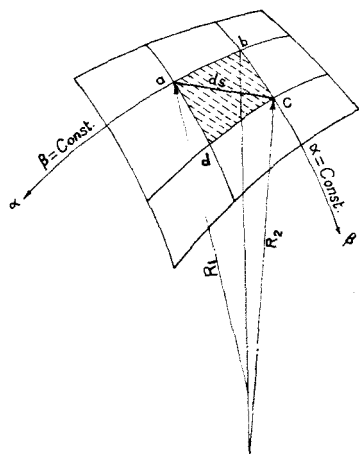


Abb. 2. Doppeltgekrümmte Fläche mit krummlinigen orthogonalen Koordinaten

Mit den Hauptkrümmungen $k_1 = 1/R_1$, $k_2 = 1/R_2$
und dem Gaußschen Krümmungsmaß

$$K = k_1 k_2 \quad (3)$$

schreiben sich die Gleichungen von Codazzi-Gauß

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) &= -K A B, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} (k_2 B) &= k_1 \frac{\partial B}{\partial \alpha}, \\ \frac{\partial}{\partial \beta} (k_1 A) &= k_2 \frac{\partial A}{\partial \beta}. \end{aligned} \right\} \quad (4a, b, c)$$

Für eine flache Kugelschale wird

$$k_1 = k_2 = k = \frac{1}{R} = \text{const.}, \quad K = \frac{1}{R^2} \approx 0 \quad (5)$$

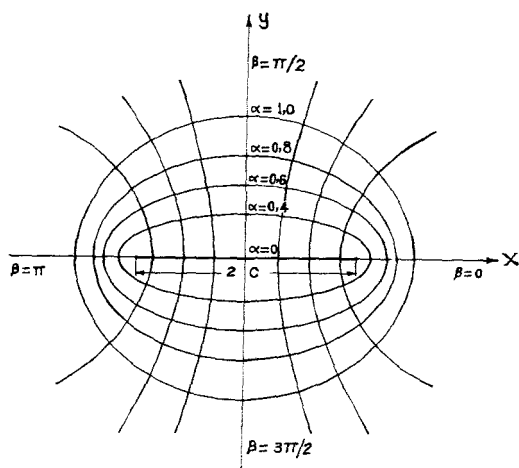
und aus (4a)

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) = 0. \quad (6)$$

(4b) und (4c) sind identisch erfüllt. Das bedeutet, daß innerhalb der Fläche, unabhängig vom Gaußschen Krümmungsmaß, eine zweidimensionale euklidische Geometrie gilt. Wenn man also auf ein kleines Flächenstück ein orthogonales Koordinatensystem legt, so unterscheidet sich dieses nicht von einem entsprechenden Koordinatensystem der Grundrißprojektion der Fläche.

1.32. Elliptische Koordinaten

Abb. 3. Elliptische Koordinaten



Das elliptische Koordinatensystem (Abb. 3) hängt mit dem kartesischen durch

$$\left. \begin{aligned} x &= c \cosh \alpha \cos \beta, \\ y &= c \sinh \alpha \sin \beta \end{aligned} \right\} \quad (7 \text{ a. b})$$

zusammen. Durch $\alpha = \text{const}$ sind die Ellipsen

$$\frac{x^2}{c^2 \cosh^2 \alpha} + \frac{y^2}{c^2 \sinh^2 \alpha} = 1$$

und durch $\beta = \text{const}$ die Hyperbeln

$$\frac{x^2}{c^2 \cos^2 \beta} - \frac{y^2}{c^2 \sin^2 \beta} = 1$$

bestimmt. Aus (7) und (2) folgt

$$A^2 = B^2 = \frac{c^2}{2} (C_2 - c_2)$$

und daraus

$$A = B = \frac{c}{\sqrt{2}} (C_2 - c_2)^{1/2}. \quad (8)$$

Der *Laplacesche* Operator $\nabla^2 = \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \right]$

erhält in elliptischen Koordinaten die Form

$$\nabla^2 = \frac{2}{c^2 (C_2 - c_2)} \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right). \quad (9)$$

1.33. Mathiesche Funktionen ganzer Ordnung

a) *Mathiesche Funktionen erster Art* $ce_m(z, h^2)$ und $se_m(z, h^2)$ sind die in 2π periodischen Lösungen der *Mathieschen Differentialgleichung*

$$y''(z) + [\lambda(h^2) - 2h^2 \cos 2z] y(z) = 0. \quad (10)$$

Sie gehören zu den Parameterwerten

$$\begin{aligned} \lambda(h^2) &= a_m(h^2) & m &= 0, 1, 2, \dots, \\ \lambda(h^2) &= b_m(h^2) & m &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (11)$$

und zerfallen in die vier Klassen

$$\left. \begin{aligned} \text{I) } ce_{2n}(z, h^2) &= \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{2n}(h^2) \cos 2rz, & (\text{gerade ganzperiodisch}) \\ \text{II) } ce_{2n+1}(z, h^2) &= \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+1}^{2n+1}(h^2) \cos (2r+1)z, & (\text{gerade halbperiodisch}) \\ \text{III) } se_{2n+1}(z, h^2) &= \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+1}^{2n+1}(h^2) \sin (2r+1)z, & (\text{ungerade halbperiodisch}) \\ \text{IV) } se_{2n+2}(z, h^2) &= \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+2}^{2n+2}(h^2) \sin (2r+2)z, & (\text{ungerade ganzperiodisch}) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Diese Funktionen sind eindeutig festgelegt als regulär analytische Funktionen von (z, h^2) mit

$$\left. \begin{aligned} ce_0(z, 0) &= 2^{-1/2}, ce_m(z, 0) = \cos mz, se_m(z, 0) = \sin mz \quad (m = 1, 2, \dots), \\ \int_0^{2\pi} ce_m^2(z, h^2) dz &= \int_0^{2\pi} se_m^2(z, h^2) dz = \pi, \\ \int_0^{2\pi} ce_m(z, h^2) ce_n(z, h^2) dz &= \int_0^{2\pi} se_m(z, h^2) se_n(z, h^2) dz = 0, \\ \int_0^{2\pi} ce_m(z, h^2) se_n(z, h^2) dz &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Sie sind so normiert, daß

$$\left. \begin{aligned} 2(A_0^{2n})^2 + \sum_{r=1}^{\infty} (A_{2r}^{2n})^2 &= 1, & \sum_{r=0}^{\infty} (A_{2r+1}^{2n+1})^2 &= 1, \\ \sum_{r=0}^{\infty} (B_{2r+1}^{2n+1})^2 &= 1, & \sum_{r=0}^{\infty} (B_{2r+2}^{2n+2})^2 &= 1, \\ A_k^m(0) = B_k^m(0) &= 2^{-1/2} \quad (k = m = 0), \\ &= 1 \quad (k = m \neq 0), \\ &= 0 \quad (k \neq m). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Die Koeffizienten A_r^n und B_r^n genügen den Rekursionsformeln

$$\begin{aligned}
 \text{I)} \quad & \left\{ \begin{aligned} \lambda A_0 - h^2 A_2 &= 0, \\ (\lambda - 4) A_2 - h^2 (2 A_0 + A_4) &= 0, \\ (\lambda - 4 r^2) A_{2r} - h^2 (A_{2r-2} + A_{2r+2}) &= 0 \quad (r = 2, 3, 4, \dots); \\ \lambda = a_{2n} (h^2), \quad A_{2r} = A_{2r}^{2n} (h^2). \end{aligned} \right. \\
 \text{II)} \quad & \left\{ \begin{aligned} (\lambda - 1 - h^2) A_1 - h^2 A_3 &= 0, \\ (\lambda - (2r+1)^2) A_{2r+1} - h^2 (A_{2r-1} + A_{2r+3}) &= 0 \quad (r = 1, 2, 3, \dots); \\ \lambda = a_{2n+1} (h^2), \quad A_{2r+1} = A_{2r+1}^{2n+1} (h^2). \end{aligned} \right. \\
 \text{III)} \quad & \left\{ \begin{aligned} (\lambda - 1 + h^2) B_1 - h^2 B_3 &= 0, \\ (\lambda - (2r+1)^2) B_{2r+1} - h^2 (B_{2r-1} + B_{2r+3}) &= 0 \quad (r = 1, 2, 3, \dots); \\ \lambda = b_{2n+1} (h^2), \quad B_{2r+1} = B_{2r+1}^{2n+1} (h^2). \end{aligned} \right. \\
 \text{IV)} \quad & \left\{ \begin{aligned} (\lambda - 4) B_2 - h^2 B_4 &= 0, \\ (\lambda - 4 r^2) B_{2r} - h^2 (B_{2r-2} + B_{2r+2}) &= 0 \quad (r = 2, 3, 4, \dots); \\ \lambda = b_{2n+2} (h^2), \quad B_{2r+2} = B_{2r+2}^{2n+2} (h^2). \end{aligned} \right.
 \end{aligned} \quad (15)$$

Aus den Rekursionsformeln (15) lassen sich die Parameterwerte $\lambda_m (h^2)$ und die Quotienten der zu $\lambda_m (h^2)$ gehörenden Koeffizienten $A_r^m (h^2)$ mit Hilfe von Kettenbrüchen berechnen. Die Koeffizienten selbst können dann durch die Normierung (14) ermittelt werden.

b) Modifizierte *Mathieusche* Funktionen erster Art $Ce_m (z, h^2)$, $Se_m (z, h^2)$

Aus jeder Lösung der *Mathieuschen* Differentialgleichung (10) gewinnt man eine Lösung der modifizierten *Mathieuschen* Differentialgleichung

$$-y''(z) + (\lambda - 2 h^2 \cosh z) y(z) = 0, \quad (16)$$

indem man z durch iz ersetzt. Aus den *Mathieuschen* Funktionen erster Art entstehen dann die modifizierten Funktionen

$$\begin{aligned}
 Ce_{2n} (z, h^2) &= ce_{2n} (iz, h^2) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{2n} (h^2) \cosh 2 r z, \\
 Ce_{2n+1} (z, h^2) &= ce_{2n+1} (iz, h^2) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+1}^{2n+1} (h^2) \cosh (2 r + 1) z, \\
 Se_{2n+1} (z, h^2) &= -i se_{2n+1} (iz, h^2) = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+1}^{2n+1} (h^2) \sinh (2 r + 1) z, \\
 Se_{2n+2} (z, h^2) &= -i se_{2n+2} (iz, h^2) = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+2}^{2n+2} (h^2) \sinh (2 r + 2) z.
 \end{aligned} \quad (17)$$

Die Eigenschaften dieser Funktionen lassen sich ohne weiteres aus den Eigenschaften der Funktionen $ce_m (z, h^2)$ und $se_m (z, h^2)$ ablesen. Es gilt

$$\begin{aligned} Ce_m(z, 0) &= \cosh mz, & Ce_0(z, 0) &= 2^{-1/2}, \\ Se_m(z, 0) &= \sinh mz & (m = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (18)$$

Die Reihen (17) sind ungeeignet für die Berechnung dieser Funktionen für große z ($z \rightarrow \infty$). Im folgenden werden die modifizierten Funktionen nach Zylinderfunktionen entwickelt. Dabei beschränken wir uns auf die Funktionen $Ce_{2n}(z, h^2)$.

$$\left. \begin{aligned} Ce_{2n}(z, h^2) &= \frac{ce_{2n}\left(\frac{\pi}{2}, h^2\right)}{A_0^{2n}(h^2)} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{2n}(h^2) J_{2r}(2h \cosh z) \\ &= \frac{ce_{2n}(0, h^2)}{A_0^{2n}(h^2)} \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{2n}(h^2) J_{2r}(2h \sinh z) \\ &= \frac{ce_{2n}(0, h^2) ce_{2n}\left(\frac{\pi}{2}, h^2\right)}{[A_0^{2n}(h^2)]^2} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{2n}(h^2) J_r(he^{-z}) J_r(he^z). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Für große z ($z \rightarrow \infty$) erhalten wir

$$\begin{aligned} 2h \cosh z &= he^z = \mu, \\ J_{2r}(2h \cosh z) &\simeq (-1)^r \left(\frac{2}{\pi \mu}\right)^{1/2} \sin\left(\mu + \frac{\pi}{4}\right), \\ Ce_{2n}(z, h^2) &\simeq \frac{ce_{2n}(0, h^2) ce_{2n}\left(\frac{\pi}{2}, h^2\right)}{A_0^{2n}(h^2)} \left(\frac{2}{\pi \mu}\right)^{1/2} \sin\left(\mu + \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned} \quad (20)$$

c) Modifizierte *Mathieusche* Funktionen dritter Art $Me_m^{1,2}(h^2)$, $Ne_m^{1,2}(h^2)$

Die Bedeutung dieser Funktionen liegt vor allem darin, daß unter den *Mathieu*-schen Funktionen sie allein für komplexes Argument (h^2) im Unendlichen verschwinden. Im folgenden werden auch diese Funktionen nach Zylinderfunktionen entwickelt. Dabei beschränken wir uns auf die Funktionen $Me_{2n}^1(z, h^2)$.

$$\left. \begin{aligned} Me_{2n}^1(z, h^2) &= \frac{ce_{2n}\left(\frac{\pi}{2}, h^2\right)}{A_0^{2n}(h^2)} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{2n}(h^2) H_{2r}^1(2h \cosh z), \\ &= \frac{ce_{2n}(0, h^2)}{A_0^{2n}(h^2)} \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{2n}(h^2) H_{2r}^1(2h \sinh z), \\ &= \frac{ce_{2n}(0, h^2) ce_{2n}\left(\frac{\pi}{2}, h^2\right)}{[A_0^{2n}(h^2)]^2} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{2n}(h^2) J_r(he^{-z}) H_r^1(he^z). \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Für große z ($z \rightarrow \infty$) erhalten wir

$$M e_{2n}^1(z, h^2) \simeq \frac{c e_{2n}(0, h^2) c e_{2n}\left(\frac{\pi}{2}, h^2\right)}{A_0^{2n}(h^2)} \left(\frac{2}{\pi \mu}\right)^{1/2} e^{i\left(\mu - \frac{\pi}{4}\right)}, \quad (22)$$

$$\mu = h e^z.$$

d) *Mathieusche Funktionen mit rein imaginärem Argument* (h^2)

Diese Funktionen sind komplexe Funktionen von z . Wir bezeichnen ihre Real- und Imaginärteile mit den Buchstaben r und i . Es folgt

$$c e_m(z, h^2) = c e_r(z, h^2) + i c e_i(z, h^2). \quad (23)$$

Setzen wir in den Gln. (12) und (23) $A_r^m(h^2) = |A_r^m(h^2)| e^{i\vartheta_r}$ dann erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} c e_r(z, h^2) &= \sum_{r=0}^{\infty} |A_r^m(h^2)| \cos rz \cos \vartheta_r, \\ c e_i(z, h^2) &= \sum_{r=0}^{\infty} |A_r^m(h^2)| \cos rz \sin \vartheta_r \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

und analog dazu

$$\left. \begin{aligned} C e_r(z, h^2) &= \sum_{r=0}^{\infty} |A_r^m(h^2)| \cosh rz \cos \vartheta_r, \\ C e_i(z, h^2) &= \sum_{r=0}^{\infty} |A_r^m(h^2)| \cosh rz \sin \vartheta_r. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Für $|h^2| < 1,4688$ können wir die Parameter $\lambda(h^2)$ aus den Formeln der *Mathieuschen Funktionen* mit reellem Argument (h^2) errechnen. Nähere Einzelheiten finden sich in [5].

Mit

$$2 h \cosh z = \mu \sqrt{i}, \quad J_{2r}(\mu \sqrt{i}) = |b_{2r}(\mu)| e^{i\beta_{2r}}, \quad H_{2r}^1(\mu \sqrt{i}) = |h_{2r}(\mu)| e^{i\gamma_{2r}},$$

$$\frac{c e_{2n}\left(\frac{\pi}{2}, h^2\right)}{A_0^{2n}(h^2)} = |E_{2n}| e^{i\psi_{2n}}, \quad \frac{c e_{2n}(0, h^2) c e_{2n}\left(\frac{\pi}{2}, h^2\right)}{A_0^{2n}(h^2)} = |P_{2n}| e^{iP_{2n}},$$

erhalten wir aus (19), (21) und (22)

$$\left. \begin{aligned} C e_{r2n}(z, h^2) &= |E_{2n}| \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r |A_{2r}^{2n}(h^2)| |b_{2r}(\mu)| \cos(\psi_{2n} + \vartheta_{2r} + \beta_{2r}), \\ C e_{i2n}(z, h^2) &= |E_{2n}| \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r |A_{2r}^{2n}(h^2)| |b_{2r}(\mu)| \sin(\psi_{2n} + \vartheta_{2r} + \beta_{2r}). \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

$$\left. \begin{aligned} Mer_{2n}^1(z, h^2) &= |E_{2n}| \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r |A_{2r}^{2n}(h^2)| |h_{2r}(\mu)| \cos(\psi_{2n} + \vartheta_{2r} + \eta_{2r}), \\ Mei_{2n}^1(z, h^2) &= |E_{2n}| \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r |A_{2r}^{2n}(h^2)| |h_{2r}(\mu)| \sin(\psi_{2n} + \vartheta_{2r} + \eta_{2r}). \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Für große z ($z \rightarrow \infty$) folgt

$$\left. \begin{aligned} Mer_{2n}^1(z, h^2) &= |P_{2n}| \left(\frac{2}{\pi \mu} \right)^{1/2} e^{-\mu/\sqrt{2}} \cos \left(P_{2n} + \frac{\mu}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} \right), \\ Mei_{2n}^1(z, h^2) &= |P_{2n}| \left(\frac{2}{\pi \mu} \right)^{1/2} e^{-\mu/\sqrt{2}} \sin \left(P_{2n} + \frac{\mu}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} \right). \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

e) Übergang von elliptischen Koordinaten zu Polarkoordinaten

Wir betrachten die Potentialgleichung $V^2 z + k^2 z = 0$. Sie lautet in elliptischen Koordinaten

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \beta^2} + 2h^2 (\cosh 2\alpha - \cos 2\beta) z = 0 \quad (2h = kc). \quad (28)$$

Gl. (28) kann man bei periodischer Funktion (z) mit dem Ansatz $z(\alpha, \beta) = f(\alpha)g(\beta)$ in eine *Mathieusche* und eine modifizierte *Mathieusche* Gleichung aufspalten:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 g}{d\beta^2} + (\lambda(h^2) - 2h^2 \cos 2\beta) g &= 0, \\ -\frac{d^2 f}{d\alpha^2} + (\lambda(h^2) - 2h^2 \cosh 2\alpha) f &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Wenn die Hauptellipse des Koordinatensystems im Grenzfall zum Kreis strebt, dann wird

$$c = 0, h = 0, \beta = \vartheta, \alpha = \infty, c \cosh \alpha = r \text{ und } \lambda_m(h^2) = m^2.$$

Aus (12), (19) und (21) erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} ce_m(\beta, h^2) &= \cos m\vartheta, \\ se_m(\beta, h^2) &= \sin m\vartheta, \\ Ce_{2n}(\alpha, h^2) &= P'_{2n} J_{2n}(kr), \\ Me_{2n}(\alpha, h^2) &= P'_{2n} H_{2n}(kr), \end{aligned} \right\} \quad m \geq 1 \quad (30)$$

$$\text{mit } P'_{2n} = (-1)^n ce_{2n}(0, h^2) ce_{2n}\left(\frac{\pi}{2}, h^2\right) / A_0^{2n}(h^2).$$

Die Funktionen *Cer*, *Cei*, *Mer*¹ und *Mei*¹ sind proportional zu den Funktionen *Ber*, *Bei*, *Her*, *Hei*. Im folgenden werden die vereinfachten Bezeichnungen *Mer* und *Mei* für die Funktionen *Mer*¹ und *Mei*¹ benutzt.

2. Biegetheorie der Kugelschale

2.1 Aufstellung der Grunddifferentialgleichung (Abb. 4)

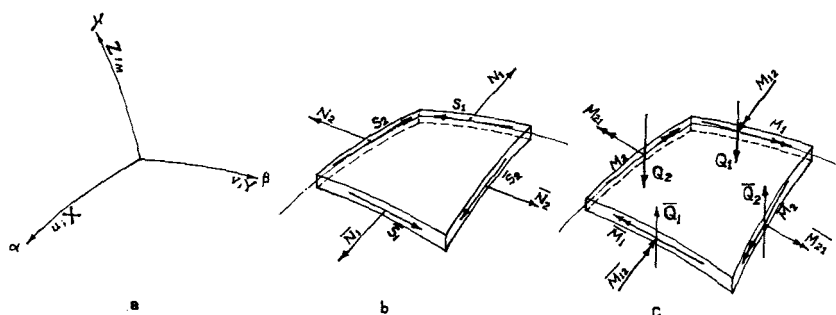


Abb. 4 a) Koordinaten, Flächenbelastung und Verschiebungen

b) Normal- und Tangentialkräfte

c) Momente und Querkräfte

Gleichgewichtsbedingungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} (B N_1) - \frac{\partial B}{\partial \alpha} N_2 + \frac{\partial}{\partial \beta} (A S) + \frac{\partial A}{\partial \beta} S + k A B Q_1 + A B X &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \beta} (A N_2) - \frac{\partial A}{\partial \beta} N_1 + \frac{\partial}{\partial \alpha} (B S) + \frac{\partial B}{\partial \alpha} S + k A B Q_2 + A B Y &= 0, \\ -k (N_1 + N_2) + \frac{1}{A B} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (B Q_1) + \frac{\partial}{\partial \beta} (A Q_2) \right] + Z &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} (B M_{12}) - \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_{12} - \frac{\partial}{\partial \beta} (A M_2) + \frac{\partial A}{\partial \beta} M_1 - A B Q_2 &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \beta} (A M_{12}) + \frac{\partial A}{\partial \beta} M_{12} - \frac{\partial}{\partial \alpha} (B M_1) + \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_2 - A B Q_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Verzerrungskomponenten

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{A B} \frac{\partial A}{\partial \beta} v + k w, \quad \kappa_1 = -k^2 w - \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) - \frac{1}{A B^2} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial w}{\partial \beta}, \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{A B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u + k w, \quad \kappa_2 = -k^2 w - \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) - \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \alpha}, \\ \omega &= \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B} \right), \quad \tau = -\frac{1}{A B} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right). \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Volumendehnung

$$\Theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \frac{1}{A B} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (B u) + \frac{\partial}{\partial \beta} (A v) \right] + 2 k w. \quad (33a)$$

Normalendrehung

$$\chi = \frac{1}{2AB} \left(\frac{\partial}{\partial x} (Bv) - \frac{\partial}{\partial \beta} (Au) \right). \quad (33b)$$

Schnittkräfte und Momente

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \frac{Et}{(1-\nu^2)} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2), & M_1 &= \frac{-Et^3}{12(1-\nu^2)} (\kappa_1 + \nu \kappa_2), \\ N_2 &= \frac{Et}{(1-\nu^2)} (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1), & M_2 &= \frac{-Et^3}{12(1-\nu^2)} (\kappa_2 + \nu \kappa_1), \\ S &= \frac{Et}{(1-\nu^2)} \omega, & M_{12} &= \frac{Et^3}{24(1+\nu)} (2\tau + kw). \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Eliminieren wir aus den Gleichgewichtsbedingungen die Querkräfte Q_1 und Q_2 und setzen wir die Schnittgrößen entsprechend (34) ein, dann erhalten wir bei Vernachlässigung der Größe $\frac{tk^2}{12}$ im Ausdruck $\left(1 \pm \frac{tk^2}{12}\right)$ folgende Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{A} \left[\frac{\partial \Theta}{\partial x} - \frac{t^2 k}{12} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 + 2k^2) w \right] - (1-\nu) \frac{1}{B} \frac{\partial \chi}{\partial \beta} + (1-\nu) \left(k^2 u - \frac{k}{A} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \\ + \frac{1-\nu^2}{Et} X = 0, \\ \frac{1}{B} \left[\frac{\partial \Theta}{\partial \beta} - \frac{t^2 k}{12} \frac{\partial}{\partial \beta} (\nabla^2 + 2k^2) w \right] + (1-\nu) \frac{1}{A} \frac{\partial \chi}{\partial x} + (1-\nu) \left(k^2 v - \frac{k}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) + \\ + \frac{1-\nu^2}{Et} Y = 0, \\ \left[\frac{t^2}{12} \nabla^2 - (1+\nu) \right] k \Theta - \frac{t^2}{12} \{ (\nabla^2 + k^2(1-\nu)) (\nabla^2 + 2k^2) \} w + \frac{1-\nu^2}{Et} Z = 0. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Eliminieren wir aus den Gln. (35) und (33) die Tangentialverschiebungen u und v , so erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} \{ \nabla^2 + k^2(1-\nu) \} \Theta - \left\{ (\nabla^2 + 2k^2) \left(\frac{t^2}{12} \nabla^2 + 1 - \nu \right) \right\} kw = - \\ - \frac{1-\nu^2}{Et} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (BX) + \frac{\partial}{\partial \beta} (AY) \right\}, \\ \left[\frac{t^2}{12} \nabla^2 - (1+\nu) \right] k \Theta - \frac{t^2}{12} \{ (\nabla^2 + 2k^2) (\nabla^2 + k^2(1-\nu)) \} w = - \frac{1-\nu^2}{Et} Z, \\ (\nabla^2 + 2k^2) \chi = \frac{1+\nu}{Et} \frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial}{\partial \beta} (AX) - \frac{\partial}{\partial x} (BY) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Eliminieren wir Θ aus den Gln. (36), dann erhalten wir die folgenden Grund-differentialgleichungen der Kugelschale

$$\left\{ \begin{aligned} & \left\{ \frac{t^2}{12(1-\nu^2)k^2} (V^2 + k^2)^2 + 1 \right\} (V^2 + 2k^2) w = \frac{1}{Et k} \left\{ \frac{1+\nu}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (BX) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial}{\partial \beta} (AY) \right] + (1-\nu) k Z - V^2 \left[\frac{t^2 k^2}{12AB} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} (BX) + \frac{\partial}{\partial \beta} (AY) - \frac{Z}{k} \right) \right] \right\}, \\ & (V^2 + 2k^2) \chi = \frac{1+\nu}{Et} \frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial}{\partial \beta} (AX) - \frac{\partial}{\partial \alpha} (BY) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Bei dünnen Schalen, d. h. für $\frac{t}{R} \leq \frac{1}{30}$, können im allgemeinen alle Glieder der Gln. (35), die die Größen $\frac{t^2}{12} k$ und ihre Ableitungen enthalten, vernachlässigt werden. Aus (35) ergibt sich dann

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{A} \frac{\partial \Theta}{\partial \alpha} - (1-\nu) \frac{1}{B} \frac{\partial \chi}{\partial \beta} + (1-\nu) \left(k^2 u - \frac{k}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) + \frac{1-\nu^2}{Et} X = 0, \\ & \frac{1}{B} \frac{\partial \Theta}{\partial \beta} + (1-\nu) \frac{1}{A} \frac{\partial \chi}{\partial \alpha} + (1-\nu) \left(k^2 v - \frac{k}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) + \frac{1-\nu^2}{Et} Y = 0, \\ & - (1+\nu) k \Theta - \frac{t^2}{12} V^2 (V^2 + 2k^2) w + \frac{1-\nu^2}{Et} Z = 0. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Die Gln. (36) lauten mit diesen Vernachlässigungen

$$\left. \begin{aligned} & [V^2 + (1-\nu) k^2] \Theta - (1-\nu) (V^2 + 2k^2) k w = - \\ & \quad - \frac{1-\nu^2}{Et} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (BX) + \frac{\partial}{\partial \beta} (AY) \right], \\ & (1+\nu) k \Theta + \frac{t^2}{12} V^2 (V^2 + 2k^2) w = \frac{1-\nu^2}{Et} Z, \\ & (V^2 + 2k^2) \chi = \frac{1+\nu}{Et} \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \beta} (AX) - \frac{\partial}{\partial \alpha} (BY) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (39 \text{ a, b, c})$$

Schließlich erhalten wir die Grunddifferentialgleichungen

$$\left. \begin{aligned} & (V^2 + 2k^2) \left(\frac{t^2}{12(1-\nu^2)k^2} V^2 V^2 + 1 \right) w = \\ & \quad = \frac{1}{Et k} \left\{ \frac{1+\nu}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (BX) + \frac{\partial}{\partial \beta} (AY) \right] + (1-\nu) k Z + \frac{V^2 Z}{k} \right\}, \\ & (V^2 + 2k^2) \chi = \frac{1+\nu}{Et} \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \beta} (AX) - \frac{\partial}{\partial \alpha} (BY) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

2.2 Biegetheorie der flachen Kugelschale

Wie vorher bereits erwähnt, gilt bei flachen Schalen die Annahme $ds^2 = A^2 d\alpha^2 + B^2 d\beta^2$ unabhängig vom Gaußschen Krümmungsmaß. Setzen wir $K = k^2 = 0$ in (40) ein und betrachten wir zur Vereinfachung nur eine Be-

lastung Z in Richtung der Schalennormalen, dann erhalten wir folgende Grunddifferentialgleichungen der flachen Kugelschale

$$\left. \begin{aligned} \left(\nabla^2 \nabla^2 + \frac{Et}{DR^2} \right) \nabla^2 w &= \frac{\nabla^2 Z}{D}, \\ \nabla^2 \chi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (41 \text{ a, b})$$

Aus (39b) erhalten wir für die Volumendehnung Θ mit $k^2 = 0$

$$\Theta = \frac{1-\nu}{Et} RZ - \frac{Rt^2}{12(1+\nu)} \nabla^2 \nabla^2 w. \quad (42)$$

Die tangentialen Verschiebungen können aus (35) wie folgt ermittelt werden

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{R^2}{(1-\nu)} \frac{1}{A} \frac{\partial \Theta}{\partial \alpha} + \frac{t^2 R}{12(1-\nu)} \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \nabla^2 w + \frac{R}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{R^2}{B} \frac{\partial \chi}{\partial \beta}, \\ v &= -\frac{R^2}{(1-\nu)} \frac{1}{B} \frac{\partial \Theta}{\partial \beta} + \frac{t^2 R}{12(1-\nu)} \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \nabla^2 w + \frac{R}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{R^2}{A} \frac{\partial \chi}{\partial \alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Die Verzerrungskomponenten ergeben sich aus (32), wobei ε_1 und ε_2 folgende Form erhalten

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= -\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) - \frac{1}{A B^2} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial w}{\partial \beta}, \\ \varepsilon_2 &= -\frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) - \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Die Schnittkräfte und Momente folgen aus (34). Die Querkräfte können aus den Gleichgewichtsbedingungen ermittelt werden

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= \frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial}{\partial \beta} (A M_{12}) + \frac{\partial A}{\partial \beta} M_{12} - \frac{\partial}{\partial \alpha} (B M_1) + \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_2 \right\} = - \\ &\quad - \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \nabla^2 w, \\ Q_2 &= \frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} (A M_{12}) + \frac{\partial A}{\partial \alpha} M_{12} - \frac{\partial}{\partial \beta} (A M_2) + \frac{\partial A}{\partial \beta} M_1 \right\} = - \\ &\quad - \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \nabla^2 w. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Schließlich ergibt sich für die Randscherkräfte

$$\left. \begin{aligned} \bar{Q}_1 &= Q_1 + \frac{1}{B} \frac{\partial M_{12}}{\partial \beta} = -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \nabla^2 w + \frac{1}{B} \frac{Et^3}{12(1+\nu)} \frac{\partial \tau}{\partial \beta}, \\ \bar{Q}_2 &= Q_2 + \frac{1}{A} \frac{\partial M_{12}}{\partial \alpha} = -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \nabla^2 w + \frac{1}{A} \frac{Et^3}{12(1+\nu)} \frac{\partial \tau}{\partial \alpha}, \\ \bar{S} &= S + k M_{12} \simeq S. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Die Biegetheorie der flachen Kugelschale läßt sich auch mit Hilfe einer Spannungsfunktion $\Phi(\alpha, \beta)$ darstellen. Die entsprechenden Gleichungen sind

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}, \\ N_2 &= \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{A B^2} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}, \\ S &= -\frac{1}{A B} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} - \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \right). \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Aus (47) folgt

$$\begin{aligned} N_1 + N_2 &= V^2 \Phi, \\ \Theta &= \frac{1-\nu}{Et} (N_1 + N_2) = \frac{1-\nu}{Et} V^2 \Phi. \end{aligned} \quad (48)$$

Bei Belastung nur in z -Richtung ($X = Y = 0$) erhalten wir aus (39a, b) mit $k^2 = 0$ und $\Theta = \frac{1-\nu}{Et} V^2 \Phi$ die folgenden Grunddifferentialgleichungen der flachen Kugelschale

$$\left. \begin{aligned} \frac{R}{Et} V^2 V^2 \Phi - V^2 w &= 0, \\ DR V^2 V^2 w + V^2 \Phi &= ZR. \end{aligned} \right\} \quad (50a, b)$$

Die Gln. (50) führen direkt zur Ermittlung der Schnittkräfte und Momente. Die Berechnung der Verschiebungen dürfte, besonders bei komplizierten Aufgaben, nicht einfach sein.

2.3 Bemerkungen zur Lösung der Gleichungen (50) nach Wlassow

Die von Wlassow [9] gegebene Lösung der Gln. (50) beruht auf den Ansätzen

$$w = V^2 V^2 F(\alpha, \beta) \quad \text{und} \quad \Phi = \frac{Et}{R} V^2 F(\alpha, \beta). \quad (51a, b)$$

Mit diesen Ansätzen ist Gl. (50a) erfüllt und Gl. (50b) erhält die Form

$$\left(V^2 V^2 + \frac{Et}{DR^2} \right) w = 0. \quad (52)$$

Der Vergleich zwischen dieser Gleichung und Gl. (41a) zeigt, daß (52) keine vollständige Lösung für die Durchbiegung $w(\alpha, \beta)$ liefert. Der Grund dafür liegt in den benutzten Ansätzen. Mit dem Ansatz $w = V^2 V^2 F$ allein wird aus der Gl. (50a)

$$\frac{R}{Et} V^2 V^2 \Phi - V^2 V^2 V^2 F = 0$$

Daraus erhalten wir $\Phi = \frac{Et}{R} \nabla^2 F + \psi$, wobei $\psi(x, \beta)$ eine analytische Funktion in α und β mit $\nabla^2 \nabla^2 \psi = 0$ ist.

Setzen wir andererseits $\Phi = \frac{Et}{R} \nabla^2 F$ in (50a) ein, dann erhalten wir $\nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 F - \nabla^2 w = 0$. Daraus wird $w = \nabla^2 \nabla^2 F + f$, wobei $f(x, \beta)$ eine analytische Funktion in α und β mit $\nabla^2 f = 0$ ist. (50b) erhält die Form

$$\left(\nabla^2 \nabla^2 + \frac{Et}{DR^2} \right) \nabla^2 \nabla^2 F - \frac{Z}{D} = 0. \quad (53)$$

Gl. (53) stimmt mit Gl. (12.8) von *Wlassow* überein. *Wlassows* Annahme $w = \nabla^2 \nabla^2 F$ ist für die Aufstellung dieser Gleichung jedoch nicht notwendig, andererseits liefert sie nicht alle Lösungen $w(x, \beta)$ der flachen Kugelschale.

Es ist also weder das Gleichungssystem (51, 52) noch das Gleichungssystem (51, 53) ein vollkommener Ersatz für die Gln. (41) bzw. (50).

3. Flache Kugelschale in elliptischen Koordinaten

Im folgenden werden wir die Grunddifferentialgleichungen (41) verwenden. Diese Gleichungen sind für unsere Aufgabe besonders geeignet, da sie es gestatten, die Verformungen der Schalenelemente, die zur Erfüllung der Randbedingungen bekannt sein müssen, in einfacher Weise zu berechnen.

3.1 Die allgemeine Lösung der Grunddifferentialgleichungen

Die Grunddifferentialgleichungen der flachen Kugelschale in allgemeinen Koordinaten sind

$$\left. \begin{aligned} \left(\nabla^2 \nabla^2 + \frac{Et}{DR^2} \right) \nabla^2 w &= \frac{\nabla^2 Z}{D}, \\ \nabla^2 \chi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (54a, b)$$

Das allgemeine Integral der Gl. (54b) ist

$$w = w_0 + w_1 + w_2 + w_3. \quad (55)$$

$w_2(x, \beta)$ ist eine beliebige partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung, die von der Belastung $Z(x, \beta)$ abhängt.

$w_0(x, \beta)$ ist die Lösung der homogenen Gleichung

$$\nabla^2 w_0 = 0. \quad (56)$$

Schließlich sind $w_1(x, \beta)$ und $w_2(x, \beta)$ die Lösungen der Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 w_1 + ik^2 w_1 &= 0, \\ \nabla^2 w_2 - ik^2 w_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (57a, b)$$

die die Komponenten der homogenen Gleichung

$$\nabla^2 \nabla^2 w + k^4 w = 0 \quad \left(k^4 = \frac{Et}{DR^2} \right) \quad (58)$$

darstellen.

3.2 Die Lösung der homogenen Differentialgleichungen

Die Gln. (57) haben imaginäre Koeffizienten, so daß sie konjugiert komplexe Funktionen als linear unabhängige Lösungen haben. Die beiden Lösungen der Gl. (57a) und (57b) bilden ein Fundamentalsystem für Gl. (58). Daher sind auch ihre reellen und imaginären Teile ein System von vier unabhängigen Lösungen, das die Gl. (58) befriedigt, nicht aber die Gln. (57). Gl. (57a) lautet in elliptischen Koordinaten

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial \beta^2} + 2h^2 (C_2 - c_2) w_1 = 0, \text{ mit } h^2 = \frac{ic^2}{2Rt} \sqrt{3(1-\nu^2)} = \frac{ik^2 c^2}{4}. \quad (59)$$

Da die Durchbiegung $w(\alpha, \beta)$ eine periodische Funktion von β mit der Periode 2π ist [$w(\beta) = w(\beta + 2\pi)$], können wir $w_1(\alpha, \beta) = f(\alpha)g(\beta)$ ansetzen, wobei $g(\beta)$ eine in β periodische Funktion ist. Mit diesem Ansatz wird aus (59)

$$g \frac{d^2 f}{d\alpha^2} + f \frac{d^2 g}{d\beta^2} + 2h^2 (C_2 - c_2) fg = 0,$$

$$\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{d\alpha^2} + \frac{1}{g} \frac{d^2 g}{d\beta^2} + 2h^2 (C_2 - c_2) = 0,$$

$$\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{d\alpha^2} + 2h^2 C_2 = -\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{d\beta^2} + 2h^2 c_2 = \text{const} = \lambda.$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{d\beta^2} - (2h^2 c_2 - \lambda) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{1}{f} \frac{d^2 f}{d\alpha^2} + (2h^2 C_2 - \lambda) = 0,$$

oder

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 g}{d\beta^2} + (\lambda - 2h^2 c_2) &= 0, \\ \frac{d^2 f}{d\alpha^2} - (\lambda - 2h^2 C_2) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (60a, b)$$

Die Gln. (60) sind eine *Mathiesche* und eine modifizierte *Mathiesche* Differentialgleichung mit rein imaginärem Argument (h^2). Die hier interessierenden Lösungen der Gl. (60a) müssen die Periode 2π haben. Das bedeutet, daß für die Parameter nur die Werte $a_n(h^2)$ und $b_n(h^2)$ in Frage kommen und die dazu gehörenden Lösungen die *Mathieschen* Funktionen $ce_n(\beta, h^2)$ und $se_n(\beta, h^2)$ sind. Da Gl. (60b) durch den Ansatz $i\alpha = \beta$ dieselbe Gestalt wie Gl. (60a) annimmt, wird diese Gleichung durch die Funktionen $ce_n(i\alpha, h^2)$ und $se_n(i\alpha, h^2)$ bzw. $Ce_n(\alpha, h^2)$ und $Se_n(\alpha, h^2)$ befriedigt.

Durch Superposition der *Mathieuschen* Funktionen erhalten wir die Lösung der Gl. (59)

$$\begin{aligned}
 w_1(\alpha, \beta) &= f(\alpha) g(\beta) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n c_n C_n + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n s_n S_n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n [(c_n C_n - c_{-n} C_{-n}) + i(c_n C_{-n} + c_{-n} C_n)] + \\
 &\quad \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n [(s_n S_n - s_{-n} S_{-n}) + i(s_n S_{-n} + s_{-n} S_n)].
 \end{aligned}$$

Schließlich ist die Lösung der Gl. (58)

$$\begin{aligned}
 w_{1+2}(\alpha, \beta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_{1n} (c_n C_n - c_{-n} C_{-n}) + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_{2n} (c_n C_{-n} + \\
 &\quad + c_{-n} C_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_{3n} (s_n S_n - s_{-n} S_{-n}) + \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_{4n} (s_n S_{-n} + s_{-n} S_n).
 \end{aligned}$$

Gl. (56) ergibt sich aus den Gleichungen (57) durch Einsetzen von k^2 bzw. $h^2 = 0$.

Es wird

$$\begin{aligned}
 w_0(\alpha, \beta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_{5n} c_n(\beta, 0) C_n(\alpha, 0) + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_{6n} s_n(\beta, 0) S_n(\alpha, 0) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_{5n} c_n C_n + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_{6n} s_n S_n.
 \end{aligned} \tag{61a}$$

Analog ergibt sich aus (54b)

$$\chi(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_{7n} c_n C_n + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_{8n} s_n S_n. \tag{61b}$$

Mit (55) erhält man den homogenen Lösungsanteil für die flache Kugelschale in der folgenden Form

$$\left. \begin{aligned}
 w(\alpha, \beta) &= \sum_{n=0}^{\infty} [\bar{A}_{5n} c_n C_n + \bar{A}_{1n} (c_n C_n - c_{-n} C_{-n}) + \\
 &\quad + \bar{A}_{2n} (c_n C_{-n} + c_{-n} C_n)] + \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} [\bar{A}_{6n} s_n S_n + \bar{A}_{3n} (s_n S_n - s_{-n} S_{-n}) + \\
 &\quad + \bar{A}_{4n} (s_n S_{-n} + s_{-n} S_n)], \\
 \chi(\alpha, \beta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_{7n} c_n C_n + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}_{8n} s_n S_n.
 \end{aligned} \right\} \tag{62}$$

Für ein Problem, bei dem die Störung mit wachsendem α abklingen muß, ist diese Lösung unbrauchbar, da $w(\alpha, \beta)$ und $\chi(\alpha, \beta)$ für große Werte von α nach Unendlich gehen. Eine Lösung, in der die geforderten Randbedingungen erfüllt werden, ergibt sich wie folgt.

Für die Funktion $f(\alpha)$ in (60b) werden die modifizierten *Mathieuschen* Funktionen $Me_n(\alpha, h^2)$ und $Ne_n(\alpha, h^2)$ gewählt. Die Lösung der Gleichung $\nabla^2 w_0 = 0$ wird zu

$$w_0(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{B}_{5n} c_n e^{-n\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{B}_{6n} s_n e^{-n\alpha} \quad \text{angenommen.}$$

Dies ergibt sich aus der bisherigen Lösung wie folgt

$$w_0(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{5n} c_n C_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{6n} s_n S_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{n\alpha} (b_{5n} c_n + b_{6n} s_n).$$

Wählen wir n von $-\infty$ bis 0, dann wird

$$w_0(\alpha, \beta) = \sum_{-\infty}^0 e^{n\alpha} (b_{5n} c_n + b_{6n} s_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{B}_{5n} e^{-n\alpha} c_n + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{B}_{6n} e^{-n\alpha} s_n,$$

wobei a_{5n} , a_{6n} , b_{5n} , b_{6n} , \overline{B}_{5n} und \overline{B}_{6n} Konstanten sind.

Die Aufstellung dieser Lösung der homogenen Gleichung verläuft genau wie vorher. Es ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} w(\alpha, \beta) &= \sum_{n=0}^{\infty} [\overline{B}_{5n} e^{-n\alpha} c_n + \overline{B}_{1n} (ce_n Mer_n - ce_{in} Me_{in}) + \\ &\quad + \overline{B}_{2n} (ce_n Me_{in} + ce_{in} Mer_n)] + \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} [\overline{B}_{6n} e^{-n\alpha} s_n + \overline{B}_{3n} (se_n Ner_n - se_{in} Ne_{in}) + \\ &\quad + \overline{B}_{4n} (se_n Ne_{in} + se_{in} Ner_n)], \\ \chi(\alpha, \beta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \overline{B}_{7n} e^{-n\alpha} c_n + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{B}_{8n} e^{-n\alpha} s_n. \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

3.3 Partikularlösung der Grunddifferentialgleichungen

Setzen wir $Z(\alpha, \beta)$ als *Mathieusche* Reihe an, so folgt

$$Z(\alpha, \beta) = Z_1(\alpha, \beta) + Z_2(\alpha, \beta)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{mn} ce_m(\beta, h_{mn}^2) Ce_m(\alpha, h_{mn}^2) + \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn} se_m(\beta, \bar{h}_{mn}^2) Se_m(\alpha, \bar{h}_{mn}^2), \end{aligned}$$

$$Z_{mn} = P_{mn} ce_m(\beta, h_{mn}^2) Ce_m(\alpha, h_{mn}^2) + Q_{mn} se_m(\beta, \bar{h}_{mn}^2) Se_m(\alpha, \bar{h}_{mn}^2),$$

$$\nabla^2 Z_{mn} = -\frac{4 h_{mn}^2}{c^2} Z_{1mn} - \frac{4 \bar{h}_{mn}^2}{c^2} Z_{2mn}.$$

Als partikuläre Lösung w_z wählen wir

$$\begin{aligned} w_z(x, \beta) &= w_1(x, \beta) + w_2(x, \beta) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \eta_{mn} c e_m(\beta, h_{mn}^2) C e_m(x, h_{mn}^2) + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_{mn} s e_m(\beta, \bar{h}_{mn}^2) S e_m(x, \bar{h}_{mn}^2). \end{aligned} \quad (64)$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} \nabla^2 w_{mn} &= -\frac{4 h_{mn}^2}{c^2} w_{1mn} - \frac{4 \bar{h}_{mn}^2}{c^2} w_{2mn}, \\ \nabla^2 \nabla^2 w_{mn} &= \frac{16 h_{mn}^4}{c^4} w_{1mn} + \frac{16 \bar{h}_{mn}^2}{c^4} w_{2mn}, \\ \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 w_{mn} &= -\frac{64 h_{mn}^6}{c^6} w_{1mn} - \frac{64 \bar{h}_{mn}^2}{c^6} w_{2mn}. \end{aligned}$$

Aus Gl. (54a) erhalten wir

$$\eta_{mn} = \frac{c^4}{D(16 h_{mn}^2 + c^4 k^4)} P_{mn}, \quad \xi_{mn} = \frac{c^4}{D(16 \bar{h}_{mn}^2 + c^4 k^4)} Q_{mn}. \quad (65)$$

Damit wird aus der Partikularlösung (64)

$$\begin{aligned} w_z(x, \beta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^4 P_{mn}}{D(16 h_{mn}^2 + c^4 k^4)} c e_m(\beta, h_{mn}^2) C e_m(x, h_{mn}^2) + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^4 Q_{mn}}{D(16 \bar{h}_{mn}^2 + c^4 k^4)} s e_m(\beta, \bar{h}_{mn}^2) S e_m(x, \bar{h}_{mn}^2). \end{aligned} \quad (66)$$

Um diese Lösung zu bestimmen, braucht man die Koeffizienten P_{mn} , Q_{mn} und h_{mn}^2 der Gl. (66). Für gleichmäßige Belastung $P = \text{const}$ der Strecke $x = 0$ bis $x = x_1$ müssen nach Perry [7] folgende Gleichungen erfüllt sein:

$$\left. \begin{aligned} P_{mn} C e'_m(0, h_{mn}^2) + Q_{mn} S e'_m(0, \bar{h}_{mn}^2) &= 0, \\ P_{mn} C e'_m(x_1, h_{mn}^2) + Q_{mn} S e'_m(x_1, \bar{h}_{mn}^2) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

Wegen der Doppelsymmetrie der Belastung ist $Q_{mn} = 0$ und $P_{mn} = 0$ für ungerades m . Damit wird

$$P = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{mn} c e_m(\beta, h_{mn}^2) C e_m(x, h_{mn}^2). \quad m = 0, 2, 4 \dots \quad (68)$$

Die Gl. (67) vereinfachen sich zu $C e'_m(0, h_{mn}^2) = 0$,

(identisch erfüllt) und $C e'_m(x_1, h_{mn}^2) = 0$. (69)

Die Argumente h_{mn}^2 lassen sich aus (69) ermitteln; die Koeffizienten P_{mn} erhalten wir aus dem Integral

$$\begin{aligned} & \int_0^{\alpha_1} \int_0^{2\pi} P (C_2 - c_2) C e_m (x, h_{mn}^2) c e_m (\beta, h_{mn}^2) d\beta d\alpha = \\ & = \int_0^{\alpha_1} \int_0^{2\pi} P_{mn} (C_2 - c_2) C e_m^2 (x, h_{mn}^2) c e_m^2 (\beta, h_{mn}^2) d\beta d\alpha. \end{aligned}$$

Es folgt

$$P_{mn} = \frac{P \int_0^{\alpha_1} C e_m (x, h_{mn}^2) (2 A_0^m C_2 - A_2^m) dx}{\int_0^{\alpha_1} C e_m^2 (x, h_{mn}^2) (C_2 - I) dx} ; \left(I = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} c e_m^2 (\beta, h_{mn}^2) c_2 d\beta \right). \quad (70)$$

Die so gewonnene Partikularlösung der Biegetheorie erfordert bei ihrer weiteren Verwendung zweifellos einen großen Rechenaufwand. Es sei daher im folgenden von der üblichen und zusätzlichen Vereinfachung Gebrauch gemacht, die Partikularlösung nach der Membrantheorie zu ermitteln. Diese Lösung der Grunddifferentialgleichung (54) ist für konstante radiale Belastung (P)

$$w_P = \frac{R^2 P}{2 E t} (1 - \nu). \quad (71)$$

3.4 Vereinfachung der Lösung der Grunddifferentialgleichungen für konstante radiale Belastung P

Wegen der Doppelsymmetrie der Belastung zu den beiden Achsen x und y wird die Durchbiegung $w(x, \beta)$ symmetrisch und die Normalendrehung $\chi(x, \beta)$ antimetrisch in bezug auf diese Achsen. Daraus ergibt sich

$$\overline{A}_{6n} = \overline{A}_{3n} = \overline{A}_{4n} = \overline{A}_{7n} = 0 \text{ und } n = 0, 2, 4, \dots \infty.$$

Setzen wir A_{1n}, A_{2n}, A_{3n} und A_{4n} statt $\overline{A}_{5n}, \overline{A}_{1n}, \overline{A}_{2n}$ und \overline{A}_{7n} , dann erhalten wir aus (62) und (71)

$$\left. \begin{aligned} w(x, \beta) &= \frac{R^2 P}{2 E t} (1 - \nu) + \sum_{n=0}^{\infty} [A_{12n} c_{2n} C_{2n} + A_{22n} (c e_{r2n} C e_{r2n} - \\ &\quad - c e_{i2n} C e_{i2n}) + A_{32n} (c e_{r2n} C e_{i2n} + c e_{i2n} C e_{r2n})], \\ \chi(x, \beta) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_{42n} s_{2n} S_{2n}. \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

Analog dazu folgt aus (63) und (71)

$$\left. \begin{aligned} w(x, \beta) &= \frac{R^2 P}{2 E t} (1 - \nu) + \sum_{n=0}^{\infty} [B_{12n} e^{-2n x} c_{2n} + B_{22n} (c e_{r2n} M e_{r2n} - \\ &\quad - c e_{i2n} M e_{i2n}) + B_{32n} (c e_{r2n} M e_{i2n} + c e_{i2n} M e_{r2n})], \\ \chi(x, \beta) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_{42n} e^{-2n x} S_{2n}. \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

4. Flache Kugelschale mit elliptischem Kern

4.1 Problemstellung

Wir betrachten eine flache Kugelschale mit elliptischem Kern nach Abb. 1. Die Schale ist aus homogenem Material und mit gleichmäßigem Innendruck P belastet. In genügender Entfernung vom Kern wird Membranlagerung angenommen. Es werden die drei Fälle: „starrer Kern“ — „Loch“ — „elastischer Kern“ — getrennt untersucht.

4.2 Lösungsansätze

Zur Erfüllung der Randbedingungen werden für den Innen- und Außenraum verschiedene Lösungen entsprechend den Gln. (72) und (73) gewählt. Die Volumendehnung Θ ergibt sich aus (41) und (39a) zu

$$\Theta = \frac{1-\nu}{Et} RP + \frac{1-\nu}{R} w_h + \Phi(x, \beta), \quad (74)$$

wobei w_h die homogene Lösung der Grunddifferentialgleichung (54a) und $\Phi(x, \beta)$ eine analytische Funktion in (x) und (β) mit $V^2\Phi(x, \beta) = 0$ ist.

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Für den Innenraum wird} & \Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+\nu}{R} A_{12n} c_{2n} C_{2n} \\ \text{und für den Außenraum} & \Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+\nu}{R} B_{12n} e^{-2n\alpha} c_{2n} \end{array} \right\} \quad (75)$$

angesetzt.

Hiermit werden die Gleichgewichtsbedingungen und die Verträglichkeitsbedingungen erfüllt.

4.3 Spannungs- und Formänderungszustand

Mit Hilfe der Durchbiegung, Normalendrehung und Volumendehnung können die gesamten Verformungen und Beanspruchungen nach Abschnitt 2 ermittelt werden. Im folgenden werden die zugehörigen Formeln angegeben. Bei ihrer Aufstellung wurde angenommen, daß $|h^2| < 1,4688$ ist, was normalerweise bei flachen Schalen zutrifft. Dann wird $a_{2n}(h^2)$ reell und

$$\left. \begin{array}{l} cer'' = -\lambda cer - 2h^2 c_2 cei, \\ cei'' = -\lambda cei + 2h^2 c_2 cer, \\ Cer'' = \lambda Cer + 2h^2 C_2 Cei, \\ Cei'' = \lambda Cei - 2h^2 C_2 Cer. \end{array} \right\} \quad (76)$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise seien folgende Abkürzungen benutzt

$$\begin{aligned} A_m &\equiv A_{m2n}, \quad B_m \equiv B_{m2n}, \quad \lambda \equiv a_{2n}(h^2), \\ cer &\equiv cer_{2n}(\beta, h^2), \quad cei \equiv cei_{2n}(\beta, h^2), \\ Cer &\equiv Cer_{2n}(x, h^2), \quad Cei \equiv Cei_{2n}(x, h^2), \\ Mer &\equiv Mer_{2n}(x, h^2), \quad Mei \equiv Mei_{2n}(x, h^2). \end{aligned}$$

Daraus folgt

a) für den Innenraum

$$w = \frac{R^2 P (1 - \nu)}{2 E t} + \sum_{n=0}^{\infty} \{A_1 c_{2n} C_{2n} + A_2 (cer Cer - cei Cei) + A_3 (cer Cei + cei Cer)\}, \quad (77)$$

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ A_1 \frac{-2\sqrt{2}(1+\nu) R n c_{2n} S_{2n}}{c(1-\nu)(C_2 - c_2)^{1/2}} + A_2 \frac{t\sqrt{6(1-\nu^2)}}{6c(1-\nu)(C_2 - c_2)^{1/2}} (cer Cei' + \right. \\ \left. + cei Cer') - A_3 \frac{t\sqrt{6(1-\nu^2)}}{6c(1-\nu)(C_2 - c_2)^{1/2}} (cer Cer' - cei Cei') + \right. \\ \left. + A_4 \frac{2\sqrt{2} R^2 n c_{2n} S_{2n}}{c(C_2 - c_2)^{1/2}} \right\}, \quad (78)$$

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ A_1 \frac{2\sqrt{2}(1+\nu) R n s_{2n} C_{2n}}{c(1-\nu)(C_2 - c_2)^{1/2}} + A_2 \frac{t\sqrt{6(1-\nu^2)}}{6c(1-\nu)(C_2 - c_2)^{1/2}} (cer Cei + \right. \\ \left. + cei Cer) - A_3 \frac{t\sqrt{6(1-\nu^2)}}{6c(1-\nu)(C_2 - c_2)^{1/2}} (cer Cer - cei Cei) - \right. \\ \left. - A_4 \frac{2\sqrt{2} R^2 n s_{2n} C_{2n}}{c(C_2 - c_2)^{1/2}} \right\}, \quad (79)$$

$$N_1 = \frac{PR}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ A_1 \frac{Et}{(1-\nu^2)} \left[c_{2n} C_{2n} \left(\frac{1+\nu}{R} - \frac{8 R n^2 (1+\nu)}{c^2 (C_2 - c_2)} \right) + \right. \right. \\ \left. + \frac{4 R n (1+\nu)}{c^2 (C_2 - c_2)^2} (s_{2n} s_2 C_{2n} + c_{2n} S_{2n} S_2) \right] + \\ \left. + A_2 \frac{Et}{(1-\nu^2)} \left[(cer Cer - cei Cei) \left(\frac{1+\nu}{R} - \frac{(1+\nu)(C_2 - \nu c_2)}{R(C_2 - c_2)} \right) + \right. \right. \\ \left. + \frac{\lambda t \sqrt{3(1-\nu^2)}}{3 c^2 (C_2 - c_2)} (cer Cei + cei Cer) + \frac{t \sqrt{3(1-\nu^2)}}{3 c^2 (C_2 - c_2)^2} (s_2 (cer Cei + \right. \\ \left. + cei Cer) - S_2 (cer Cei' + cei Cer')) \right] + A_3 \frac{Et}{(1-\nu^2)} \left[(cer Cei + \right. \\ \left. + cei Cer) \left(\frac{1+\nu}{R} - \frac{(1+\nu)(C_2 - \nu c_2)}{R(C_2 - c_2)} \right) - \frac{\lambda t \sqrt{3(1-\nu^2)}}{3 c^2 (C_2 - c_2)} (cer Cer - \right. \\ \left. - cei Cei) + \frac{t \sqrt{3(1-\nu^2)}}{3 c^2 (C_2 - c_2)^2} (S_2 (cer Cer' - cei Cei') - s_2 (cer Cer - \right. \\ \left. - cei Cei)) \right] + A_4 \frac{4 R^2 n Et}{c^2 (1+\nu)(C_2 - c_2)} \left[2 n c_{2n} C_{2n} - \right. \\ \left. - 2 n s_{2n} S_{2n} \right] \right\}$$

$$\left. - \frac{s_2 s_{2n} C_{2n}}{(C_2 - c_2)} - \frac{c_{2n} S_{2n} S_2}{(C_2 - c_2)} \right\} \Bigg\}, \quad (80)$$

$$\begin{aligned} N_2 = & \frac{PR}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ A_1 \frac{Et}{(1-\nu^2)} \left[c_{2n} C_{2n} \left(\frac{1+\nu}{R} + \frac{8 R n^2 (1+\nu)}{c^2 (C_2 - c_2)} \right) - \right. \right. \\ & - \frac{4 R n (1+\nu)}{c^2 (C_2 - c_2)^2} (s_{2n} s_2 C_{2n} + c_{2n} S_{2n} S_2) \Bigg] + A_2 \frac{Et}{(1-\nu^2)} \left[(cer Cer - \right. \\ & - cei Cei) \left(\frac{1+\nu}{R} + \frac{(1+\nu)(c_2 - \nu C_2)}{c^2 (C_2 - c_2)} \right) - \frac{\lambda t \sqrt{3(1-\nu^2)}}{3 c^2 (C_2 - c_2)} (cer Cei + \\ & + cei Cer) + \frac{t \sqrt{3(1-\nu^2)}}{3 c^2 (C_2 - c_2)^2} (S_2 (cer Cei' + cei Cer') - s_2 (cer' Cei + \\ & + cei' Cer)) \Bigg] + A_3 \frac{Et}{(1-\nu^2)} \left[(cer Cei + cei Cer) \left(\frac{1+\nu}{R} + \right. \right. \\ & + \frac{(1+\nu)(c_2 - \nu C_2)}{R (C_2 - c_2)} \Bigg) + \frac{\lambda t \sqrt{3(1-\nu^2)}}{3 c^2 (C_2 - c_2)} (cer Cer - cei Cei) + \\ & + \frac{t \sqrt{3(1-\nu^2)}}{3 c^2 (C_2 - c_2)^2} (s_2 (cer' Cer - cei' Cei) - S_2 (cer Cer' - cei Cei')) \Bigg] + \\ & \left. + A_4 \frac{4 R^2 n Et}{c^2 (1+\nu) (C_2 - c_2)} \left[- 2 n c_{2n} C_{2n} + \frac{s_{2n} s_2 C_{2n}}{(C_2 - c_2)} - \frac{c_{2n} S_{2n} S_2}{(C_2 - c_2)} \right] \right\}, \quad (81) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S = & \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ A_1 \frac{Et}{2 c^2 (1+\nu) (C_2 - c_2)} \left[\frac{16(1+\nu)}{(1-\nu)} R n^2 s_{2n} S_{2n} - \right. \right. \\ & - \frac{8(1+\nu) R_n}{(1-\nu) (C_2 - c_2)} (S_2 C_{2n} s_{2n} - s_2 c_{2n} S_{2n}) \Bigg] + \\ & + A_2 \frac{Et^2 \sqrt{3(1-\nu^2)}}{4 c^2 (1-\nu^2) (C_2 - c_2)} \left[2 (cer' Cei' + cei' Cer' - \right. \\ & - \frac{2}{(C_2 - c_2)} (s_2 (cer Cei' + cei Cer') + S_2 (cer' Cei + cei' Cer)) \Bigg] + \\ & + A_3 \frac{Et^2 \sqrt{3(1-\nu^2)}}{4 c^2 (1-\nu^2) (C_2 - c_2)} \left[- 2 (cer' Cer' - cei' Cei') + \right. \\ & + \frac{2}{(C_2 - c_2)} (s_2 (cer Cer' - cei Cei') + S_2 (cer' Cer - cei' Cei)) \Bigg] + \\ & \left. + A_4 \frac{4 Et R^2 n}{c^2 (1+\nu) c^2 (C_2 - c_2)} \left[2 n s_{2n} S_{2n} - \frac{1}{(C_2 - c_2)} (s_2 c_{2n} S_{2n} - \right. \right. \\ & \left. \left. - S_2 C_{2n} s_{2n}) \right] \right\}, \quad (82) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ A_1 \frac{-4 E t^3 n}{12 (1 + \nu) c^2 (C_2 - c_2)} \left[-2 n c_{2n} C_{2n} + \frac{1}{(C_2 - c_2)} (s_{2n} s_2 C_{2n} + \right. \right. \\
+ S_2 S_{2n} c_{2n}) \Big] + A_2 \frac{2 E t^3}{12 (1 + \nu) c^2 (C_2 - c_2)} \left[\lambda (cer Cer - cei Cei) + \right. \\
+ \frac{c^2 \sqrt{3(1-\nu^2)}}{Rt(1-\nu)} (C_2 - \nu c_2) (cer Cei + cei Cer) + \frac{s_2}{(C_2 - c_2)} (cer' Cer - \\
- cei' Cei) - \frac{S_2}{(C_2 - c_2)} (cer Cer' - cei Cei') \Big] + \\
+ A_3 \frac{2 E t^3}{12 (1 + \nu) c^2 (C_2 - c_2)} \left[\lambda (cer Cei + cei Cer) - \right. \\
- \frac{c^2 \sqrt{3(1-\nu^2)}}{Rt(1-\nu)} (C_2 - \nu c_2) (cer Cer - cei Cei) + \frac{s_2}{(C_2 - c_2)} (cer' Cei + \\
+ cei' Cer) - \frac{S_2}{(C_2 - c_2)} (cer Cei' + cei Cer') \Big] \Big\}, \quad (83)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ A_1 \frac{4 E t^3 n}{12 (1 + \nu) c^2 (C_2 - c_2)} \left[-2 n c_{2n} C_{2n} + \frac{1}{(C_2 - c_2)} (s_{2n} s_2 C_{2n} + \right. \right. \\
+ S_2 S_{2n} c_{2n}) \Big] + A_2 \frac{-2 E t^3}{12 (1 + \nu) c^2 (C_2 - c_2)} \left[\lambda (cer Cer - cei Cei) + \right. \\
+ \frac{c^2 \sqrt{3(1-\nu^2)}}{Rt(1-\nu)} (c_2 - \nu C_2) (cer Cei + cei Cer) + \frac{s_2}{(C_2 - c_2)} (cer Cer - \\
- cei' Cei) - \frac{S_2}{(C_2 - c_2)} (cer Cer' - cei Cei') \Big] + \\
+ A_3 \frac{-2 E t^3}{12 (1 + \nu) c^2 (C_2 - c_2)} \left[\lambda (cer Cei + cei Cer) - \right. \\
- \frac{c^2 \sqrt{3(1-\nu^2)}}{Rt(1-\nu)} (c_2 - \nu C_2) (cer Cer - cei Cei) + \frac{s_2}{(C_2 - c_2)} (cer' Cei + \\
+ cei' Cer) - \frac{S_2}{(C_2 - c_2)} (cer Cei' + cei Cer') \Big] \Big\}, \quad (84)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{12} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ A_1 \frac{E t^3}{6 c^2 (1 + \nu) (C_2 - c_2)} \left[4 n^2 s_{2n} S_{2n} + \frac{2 n}{(C_2 - c_2)} (S_{2n} s_2 c_{2n} - \right. \right. \\
- S_2 C_{2n} s_{2n}) \Big] + A_2 \frac{E t^3}{6 c^2 (1 + \nu) (C_2 - c_2)} \left[- (cer' Cer' - cei' Cei') + \right. \\
+ \frac{1}{(C_2 - c_2)} (s_2 (cer Cer' - cei Cei') + S_2 (cer Cer - cei Cei)) \Big] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + A_3 \frac{Et^3}{6c^2(1+\nu)(C_2-c_2)} \left[-(\operatorname{cer} \operatorname{Cei}' + \operatorname{cei} \operatorname{Cer}') + \right. \\
& \left. + \frac{1}{(C_2-c_2)} (s_2(\operatorname{cer} \operatorname{Cer}' - \operatorname{cei} \operatorname{Cei}') + S_2(\operatorname{cer} \operatorname{Cei} + \operatorname{cei} \operatorname{Cer})) \right] \Bigg\}, \quad (85)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_1 = \sum_{n=0}^{\infty} & \left\{ A_2 \frac{-Et^2}{c\sqrt{6(1-\nu^2)}R(C_2-c_2)^{1/2}} (\operatorname{cer} \operatorname{Cei}' + \operatorname{cei} \operatorname{Cer}') + \right. \\
& \left. + A_3 \frac{Et^3}{c\sqrt{6(1-\nu^2)}R(C_2-c_2)^{1/2}} (\operatorname{cer} \operatorname{Cer}' - \operatorname{cei} \operatorname{Cei}') \right\}. \quad (86)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_2 = \sum_{n=0}^{\infty} & \left\{ A_2 \frac{-Et^2}{c\sqrt{6(1-\nu^2)}R(C_2-c_2)^{1/2}} (\operatorname{cer} \operatorname{Cei} + \operatorname{cei} \operatorname{Cer}) + \right. \\
& \left. + A_3 \frac{Et^3}{c\sqrt{6(1-\nu^2)}R(C_2-c_2)^{1/2}} (\operatorname{cer} \operatorname{Cer}' - \operatorname{cei} \operatorname{Cei}') \right\}, \quad (87)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_1 = \sum_{n=0}^{\infty} & \left\{ A_1 \frac{\sqrt{2}Et^3}{12(1+\nu)c^3(C_2-c_2)^{3/2}} \left[16n^3c_{2n}S_{2n} - \frac{24n^2}{(C_2-c_2)} s_{2n}s_2S_{2n} + \right. \right. \\
& + \left(\frac{4c_2}{(C_2-c_2)} - \frac{8s_2^2}{(C_2-c_2)^2} \right) 2nc_{2n}S_{2n} + \frac{16n}{(C_2-c_2)} S_2C_{2n}s_2s_{2n} - \\
& - \frac{8n^2}{(C_2-c_2)} S_2c_{2n}C_{2n} \Bigg] + A_2 \frac{\sqrt{2}Et^3}{12(1+\nu)c^3(C_2-c_2)^{3/2}} \\
& \left[-\frac{2\lambda S_2}{(C_2-c_2)} (\operatorname{cer} \operatorname{Cer} - \operatorname{cei} \operatorname{Cei}) - \frac{8S_2s_2}{(C_2-c_2)^2} (\operatorname{cer} \operatorname{Cer} - \operatorname{cei} \operatorname{Cei}) + \right. \\
& + \left(2\lambda + \frac{4c^2}{(C_2-c_2)} - \frac{8s_2^2}{(C_2-c_2)^2} \right) (\operatorname{cer} \operatorname{Cer}' - \operatorname{cei} \operatorname{Cei}') + \\
& + \frac{6s_2}{(C_2-c_2)} (\operatorname{cer} \operatorname{Cer}' - \operatorname{cei} \operatorname{Cei}') - \frac{2\sqrt{3}(1-\nu^2)}{Rt(C_2-c_2)} S_2(\operatorname{cer} \operatorname{Cei} + \\
& + \operatorname{cei} \operatorname{Cer}) + \left(\frac{2c^2\sqrt{3}(1-\nu^2)}{Rt} - \frac{12c^2(1+\nu)(C_2-c_2)}{2\sqrt{3}(1-\nu^2)Rt} \right) (\operatorname{cer} \operatorname{Cei}' + \\
& + \operatorname{cei} \operatorname{Cer}') \Bigg] + A_3 \frac{\sqrt{2}Et^3}{12(1+\nu)c^3(C_2-c_2)^{3/2}} \left[-\frac{2\lambda S_2}{(C_2-c_2)} (\operatorname{cer} \operatorname{Cei} + \right. \\
& + \operatorname{cei} \operatorname{Cer}) - \frac{8S_2s_2}{(C_2-c_2)^2} (\operatorname{cer} \operatorname{Cei} + \operatorname{cei} \operatorname{Cer}) + \left(2\lambda + \frac{4c_2}{(C_2-c_2)} - \right. \\
& - \left. \frac{8s_2^2}{(C_2-c_2)^2} \right) (\operatorname{cer} \operatorname{Cei}' + \operatorname{cei} \operatorname{Cer}') + \frac{6s_2}{(C_2-c_2)} (\operatorname{cer} \operatorname{Cei}' +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \operatorname{cer} \operatorname{Cer}' + \frac{2 \sqrt{3(1-\nu^2)} S_2}{R t (C_2 - c_2)} (\operatorname{cer} \operatorname{Cer} - \operatorname{cei} \operatorname{Cei}) + \\
& + \left(\frac{12 c^2 (1+\nu) (C_2 - c_2)}{2 \sqrt{3(1-\nu^2)} R t} - \frac{2 c^2 \sqrt{3(1-\nu^2)}}{R t} \right) (\operatorname{cer} \operatorname{Cer}' - \operatorname{cei} \operatorname{Cei}') \Bigg\}, \\
\end{aligned} \tag{88}$$

b) für den Außenraum

$$\begin{aligned}
w = \frac{R^2 P (1-\nu)}{2 E t} + \sum_{n=0}^{\infty} \{ B_1 c_{2n} e^{-2n\alpha} + B_2 (\operatorname{cer} \operatorname{Mer} - \operatorname{cei} \operatorname{Mei}) + \\
+ B_3 (\operatorname{cer} \operatorname{Mei} + \operatorname{cei} \operatorname{Mer}) \}, \\
\end{aligned} \tag{89}$$

$$\begin{aligned}
u = \sum_{n=0}^{\infty} \Bigg\{ B_1 \frac{(1+\nu) 2 \sqrt{2} R n}{(1-\nu) c (C_2 - c_2)^{1/2}} c_{2n} e^{-2n\alpha} + \\
+ B_2 \frac{t \sqrt{6(1-\nu^2)}}{6 c (1-\nu) (C_2 - c_2)^{1/2}} (\operatorname{cer} \operatorname{Mei}' + \operatorname{cei} \operatorname{Mer}') - \\
- B_3 \frac{t \sqrt{6(1-\nu^2)}}{6 c (1-\nu) (C_2 - c_2)^{1/2}} (\operatorname{cer} \operatorname{Mer}' - \operatorname{cei} \operatorname{Mei}') + \\
+ B_4 \frac{2 \sqrt{2} R^2 n s_{2n} e^{-2n\alpha}}{c (C_2 - c_2)^{1/2}} \Bigg\}, \\
\end{aligned} \tag{90}$$

$$\begin{aligned}
v = \sum_{n=0}^{\infty} \Bigg\{ B_1 \frac{(1+\nu) 2 \sqrt{2} R n}{(1-\nu) c (C_2 - c_2)^{1/2}} c_{2n} e^{-2n\alpha} + \\
+ B_2 \frac{t \sqrt{6(1-\nu^2)}}{6 c (1-\nu) (C_2 - c_2)^{1/2}} (\operatorname{cer} \operatorname{Mei} + \operatorname{cei} \operatorname{Mer}) - \\
- B_3 \frac{t \sqrt{6(1-\nu^2)}}{6 c (1-\nu) (C_2 - c_2)^{1/2}} (\operatorname{cer} \operatorname{Mer} - \operatorname{cei} \operatorname{Mei}) + \\
+ B_4 \frac{2 \sqrt{2} R^2 n s_{2n} e^{-2n\alpha}}{c (C_2 - c_2)^{1/2}} \Bigg\}, \\
\end{aligned} \tag{91}$$

$$\begin{aligned}
N_1 = \frac{P R}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \Bigg\{ B_1 \frac{E t}{(1-\nu^2)} \left[c_{2n} e^{-2n\alpha} \left(\frac{1+\nu}{R} - \frac{8(1+\nu) R n^2}{c^2 (C_2 - c_2)} \right) + \right. \\
\left. + \frac{4 R n (1+\nu)}{c^2 (C_2 - c_2)^2} (s_{2n} s_2 e^{-2n\alpha} - c_{2n} S_2 e^{-2n\alpha}) \right] + \\
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + B_2 \frac{Et}{(1-\nu^2)} \left[\left(\frac{1+\nu}{R} - \frac{(1+\nu)(C_2-\nu c_2)}{R(C_2-c_2)} (cer Mer - cei Mei) + \right. \right. \\
& + \frac{\lambda t \sqrt{3(1-\nu^2)}}{3c^2(C_2-c_2)} (cer Mei + cei Mer) - \frac{t \sqrt{3(1-\nu^2)}}{3c^2(C_2-c_2)} \left(S_2(cer Mei' + \right. \\
& + cei Mer') - s_2(cer' Mei + cei' Mer) \left. \right) \left. \right] + B_3 \frac{Et}{(1-\nu^2)} \left[\left(\frac{1+\nu}{R} - \right. \right. \\
& - \frac{(1+\nu)(C_2-\nu c_2)}{R(C_2-c_2)} \left. \right) (cer Mei + cei Mer) - \frac{\lambda t \sqrt{3(1-\nu^2)}}{3c^2(C_2-c_2)} (cer Mer - \\
& - cei Mei) + \frac{t \sqrt{3(1-\nu^2)}}{3c^2(C_2-c_2)^2} \left(S_2(cer Mer' - cei Mei') - \right. \\
& - s_2(cer' Mer - cei' Mei) \left. \right) \left. \right] + B_4 \frac{4R^2 n Et}{c^2(1+\nu)(C_2-c_2)} \\
& \left[-2nc_2n e^{-2nx} + \frac{1}{(C_2-c_2)} (s_2 s_{2n} e^{-2nx} - c_{2n} S_2 e^{-2nx}) \right] \Bigg\}, \quad (92)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_2 = & \frac{PR}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ B_1 \frac{Et}{(1-\nu^2)} \left[c_{2n} e^{-2nx} \left(\frac{1+\nu}{R} + \frac{8(1+\nu)Rn^2}{c^2(C_2-c_2)} \right) - \right. \right. \\
& - \frac{4Rn(1+\nu)}{c^2(C_2-c_2)^2} (s_{2n} s_2 e^{-2nx} - c_{2n} S_2 e^{-2nx}) \left. \right] + \\
& + B_2 \frac{Et}{(1-\nu^2)} \left[\left(\frac{1+\nu}{R} + \frac{(1+\nu)(c_2-\nu C_2)}{R(C_2-c_2)} (cer Mer - cei Mei) - \right. \right. \\
& - \frac{\lambda t \sqrt{3(1-\nu^2)}}{3c^2(C_2-c_2)} (cer Mei + cei Mer) - \frac{t \sqrt{3(1-\nu^2)}}{3c^2(C_2-c_2)^2} \left(S_2(cer Mei' + \right. \\
& + cei Mer') - s_2(cer' Mei + cei' Mer) \left. \right) \left. \right] + B_3 \frac{Et}{(1-\nu^2)} \left[\left(\frac{1+\nu}{R} + \right. \right. \\
& + \frac{(1+\nu)(c_2-\nu C_2)}{R(C_2-c_2)} \left. \right) (cer Mei + cei Mer) + \frac{\lambda t \sqrt{3(1-\nu^2)}}{3c^2(C_2-c_2)} (cer Mer - \\
& - cei Mei) - \frac{t \sqrt{3(1-\nu^2)}}{3c^2(C_2-c_2)^2} \left(S_2(cer Mer' - cei Mei') - \right. \\
& - s_2(cer' Mer - cei' Mei) \left. \right) \left. \right] + B_4 \frac{4Rn^2 Et}{c^2(1+\nu)(C_2-c_2)} \left[2nc_{2n} e^{-2nx} + \right. \\
& + \frac{1}{(C_2-c_2)} (c_{2n} S_2 e^{-2nx} - s_2 s_{2n} e^{-2nx}) \left. \right] \Bigg\}, \quad (93)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S = \sum_{n=0}^{\infty} \bigg\{ & B_1 \frac{-4 E t R n}{c^2 (C_2 - c_2) (1 + \nu)} \left[2 n s_{2n} e^{-2 n x} + \frac{1}{(C_2 - c_2)} (s_2 c_{2n} e^{-2 n x} + \right. \\
& + S_2 s_{2n} e^{-2 n x}) \bigg] + B_2 \frac{E t^2 \sqrt{3 (1 - \nu^2)}}{2 c^2 (1 - \nu^2) (C_2 - c_2)} \left[(cer' Mer' + \right. \\
& + cei' Mer') - \frac{1}{(C_2 - c_2)} (s_2 (cer Mei' + cei Mer') + S_2 (cer' Mei + \\
& + cei' Mer)) \bigg] + B_3 \frac{E t^2 \sqrt{3 (1 - \nu^2)}}{2 c^2 (1 - \nu^2) (C_2 - c_2)} \left[- (cer' Mer' - \right. \\
& - cei' Mei') + \frac{1}{(C_2 - c_2)} (s_2 (cer Mer' - cei Mei) + S_2 (cer' Mer - \\
& - cei Mei)) \bigg] + B_4 \frac{-4 E t R^2 n}{c^2 (1 + \nu) (C_2 - c_2)} \left[2 n s_{2n} e^{-2 n x} + \right. \\
& + \frac{1}{(C_2 - c_2)} (c_{2n} s_2 e^{-2 n x} + S_2 s_{2n} e^{-2 n x}) \bigg] \bigg\}, \quad (94)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \bigg\{ & B_1 \frac{4 E t^3 n}{12 (1 + \nu) c^2 (C_2 - c_2)} \left[2 n c_{2n} e^{-2 n x} + \frac{1}{(C_2 - c_2)} (c_{2n} e^{-2 n x} S_2 - \right. \\
& - s_{2n} s_2 e^{-2 n x}) \bigg] + B_2 \frac{2 E t^3}{12 (1 + \nu) c^2 (C_2 - c_2)} \left[\frac{-S_2}{(C_2 - c_2)} (cer Mer' - \right. \\
& - cei Mei') + \frac{s_2}{(C_2 - c_2)} (cer' Mer - cei Mei) + \lambda (cer Mer - \\
& - cei Mei) + \frac{c^2 \sqrt{3 (1 - \nu^2)}}{R t (1 - \nu)} (C_2 - \nu c_2) (cer Mei + cei Mer) \bigg] + \\
& + B_3 \frac{2 E t^3}{12 (1 + \nu) c^2 (C_2 - c_2)} \left[\frac{S_2}{(C_2 - c_2)} (cer Mei' + cei Mer') - \right. \\
& - \frac{s_2}{(C_2 - c_2)} (cer' Mei + cei Mer) + \frac{c^2 \sqrt{3 (1 - \nu^2)}}{R t (1 - \nu)} (C_2 - \\
& - \nu c_2) (cer Mer - cei Mei) - \lambda (cer Mei + cei Mer) \bigg] \bigg\}, \quad (95)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \bigg\{ & B_1 \frac{4 E t^3 n}{12 (1 + \nu) c^2 (C_2 - c_2)} \left[-2 n c_{2n} e^{-2 n x} + \right. \\
& + \frac{1}{(C_2 - c_2)} (s_2 s_{2n} e^{-2 n x} - c_{2n} S_2 e^{-2 n x}) \bigg] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + B_2 \frac{2 E t^3}{12 (1 + \nu) c^2 (C_2 - c_2)} \left[\frac{S_2}{(C_2 - c_2)} (cer Mer' - cei Mei') - \right. \\
 & - \frac{s_2}{(C_2 - c_2)} (cer Mer - cei Mei) - \lambda (cer Mer - cei Mei) - \\
 & - \left. \frac{c^2 \sqrt{3 (1 - \nu^2)}}{R t (1 - \nu)} (c_2 - \nu C_2) (cer Mei + cei Mer) \right] + \\
 & + B_3 \frac{2 E t^3}{12 (1 + \nu) c^2 (C_2 - c_2)} \left[\frac{S_2}{(C_2 - c_2)} (cer Mei' + cei Mer') - \right. \\
 & - \frac{s_2}{(C_2 - c_2)} (cer Mei + cei Mer) + \frac{c^2 \sqrt{3 (1 - \nu^2)}}{R t (1 - \nu)} (c_2 - \\
 & - \nu C_2) (cer Mer - cei Mei) - \lambda (cer Mei + cei Mer) \left. \right] \Bigg\}, \quad (96)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{12} = \sum_{n=0}^{\infty} \Bigg\{ & B_1 \frac{2 E t^3 n}{6 c^2 (1 + \nu) (C_2 - c_2)} \left[- 2 n s_{2n} e^{-2 n x} - \frac{s_2 c_{2n} e^{-2 n x}}{(C_2 - c_2)} - \right. \\
 & - \left. \frac{S_2 s_{2n} e^{-2 n x}}{(C_2 - c_2)} \right] + B_2 \frac{E t^3}{6 c^2 (1 + \nu) (C_2 - c_2)} \left[- (cer Mer' - \right. \\
 & - cei Mei') + \frac{s_2}{(C_2 - c_2)} (cer Mer' - cei Mei') + \\
 & + \frac{S_2}{(C_2 - c_2)} (cer Mer - cei Mei) \left. \right] + B_3 \frac{E t^3}{6 c^2 (1 + \nu) (C_2 - c_2)} \\
 & \left[- (cer Mei' + cei Mer') + \frac{s_2}{(C_2 - c_2)} (cer Mei + cei Mer) + \right. \\
 & + \left. \frac{S_2}{(C_2 - c_2)} (cer Mei' + cei Mer') \right] \Bigg\}, \quad (97)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \Bigg\{ & B_2 \frac{- E t^2}{c \sqrt{6 (1 - \nu^2)} R (C_2 - c_2)^{1/2}} (cer Mei' + cei Mer') + \\
 & + B_3 \frac{E t^2}{c \sqrt{6 (1 - \nu^2)} R (C_2 - c_2)^{1/2}} (cer Mer' - cei Mei') \Bigg\}, \quad (98)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \Bigg\{ & B_2 \frac{- E t^2}{c \sqrt{6 (1 - \nu^2)} R (C_2 - c_2)^{1/2}} (cer Mei + cei Mer) + \\
 & + B_3 \frac{E t^2}{c \sqrt{6 (1 - \nu^2)} R (C_2 - c_2)^{1/2}} (cer Mer - cei Mer) \Bigg\}, \quad (99)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_1 = \sum \left\{ B_1 \frac{\sqrt{2} E t^3}{12 (1 + \nu) c^3 (C_2 - c_2)^{3/2}} \left[-16 n^3 c_{2n} e^{-2 n x} + \right. \right. \\
+ \frac{24 n^2 s_{2n} s_2 e^{-2 n x}}{(C_2 - c_2)} - \left(\frac{4 c_2}{(C_2 - c_2)} - \frac{8 s_2^2}{(C_2 - c_2)^2} \right) 2 n c_{2n} e^{-2 n x} \\
+ \left. \frac{16 S_2 s_2}{(C_2 - c_2)^2} s_{2n} n e^{-2 n x} - \frac{8 n^2 S_2 c_{2n} e^{-2 n x}}{(C_2 - c_2)} \right] + \\
+ B_2 \frac{\sqrt{2} E t^3}{12 (1 + \nu) c^3 (C_2 - c_2)^{3/2}} \left[\frac{-2 \lambda S_2}{(C_2 - c_2)} (cer Mer - cei Mei) - \right. \\
- \frac{8 S_2 s_2}{(C_2 - c_2)} (cer' Mer - cei' Mei) + \left(2 \lambda + \frac{4 c_2}{(C_2 - c_2)} - \right. \\
- \left. \frac{8 s_2^2}{(C_2 - c_2)^2} \right) (cer Mer' - cei Mei') + \frac{6 s_2}{(C_2 - c_2)} (cer Mer' - \\
- cei Mei') - \frac{2 \sqrt{3} (1 - \nu^2)}{R t (C_2 - c_2)} c^2 S_2 (cer Mei + cei Mer) + \\
+ \left(\frac{2 \sqrt{3} (1 - \nu^2) c^2}{t R \sqrt{3} (1 - \nu^2)} - \frac{12 (1 + \nu) c^2 (C_2 - c_2)}{2 t R \sqrt{3} (1 - \nu^2)} \right) (cer Mei' + cei Mer') \Big] \\
+ B_3 \frac{\sqrt{2} E t^3}{12 (1 + \nu) c^3 (C_2 - c_2)^{3/2}} \left[\frac{-2 \lambda S_2}{(C_2 - c_2)} (cer Mei + cei Mer) - \right. \\
- \frac{8 S_2 s_2}{(C_2 - c_2)^2} (cer Mei + cei Mer) + \left(2 \lambda + \frac{4 c_2}{(C_2 - c_2)} - \right. \\
- \left. \frac{8 s_2^2}{(C_2 - c_2)^2} \right) (cer Mei' + cei Mer') + \frac{6 s_2}{(C_2 - c_2)} (cer Mei' + \\
+ cei Mer') + \frac{2 \sqrt{3} (1 - \nu^2) c^2 S_2}{R t (C_2 - c_2)} (cer Mer - cei Mei) + \\
+ \left(\frac{-2 \sqrt{3} (1 - \nu^2) c^2}{R t} - \frac{12 (1 + \nu) c^2 (C_2 - c_2)}{2 t R \sqrt{3} (1 - \nu^2)} \right) (cer Mer' - \\
- cei Mei') \Big] \Big\} . \quad (100)
\end{aligned}$$

4.4 Randbedingungen

a) Flache Kugelschale mit starrem Kern (Abb. 5)

Der starre Kern behält bei der Verformung seine Gestalt und seine Abmessungen. Für den Außenraum bei $\alpha = \alpha_1$ wird

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w_a}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial (w_a \cos \varphi)}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta} w_a \left(1 - \frac{c^2}{4 R^2} (C_2 - c_2) \right) = 0, \\ v_a = -u_a \operatorname{tg} \psi = -u_a \frac{s_2}{S_2}, \quad u_a = -\frac{w_a}{R} r \cos \psi = -\frac{w_a s_2 c}{\sqrt{2} R (C_2 - c_2)^{1/2}} \end{aligned} \right\} \quad (101)$$

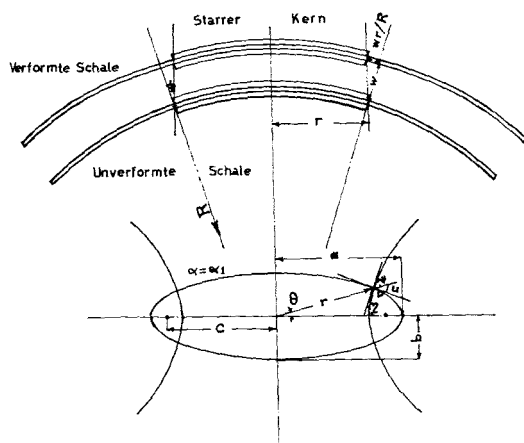


Abb. 5. Flache Kugelschale mit starrem Kern

b) Flache Kugelschale mit elliptischem Loch

Am Rande des elliptischen Loches ($\alpha = \alpha_1$) ist

$$N_{1a} = 0, \quad M_{1a} = 0, \quad S_a = 0, \quad \bar{Q}_{1a} = 0. \quad (102)$$

c) Flache Kugelschale mit elastischem Kern

Zwischen dem Innen- und Außenraum entsteht keine Kluft. Außerdem müssen am Kernrand ($\alpha = \alpha_1$) die Beanspruchungen für Innen- und Außenraum gleich sein. Es folgt

$$\left. \begin{aligned} u_i &= u_a, \quad v_i = v_a, \quad w_i = w_a, \quad w'_i = w'_a, \\ N_{1i} &= N_{1a}, \quad M_{1i} = M_{1a}, \quad S_i = S_a, \quad \bar{Q}_{1i} = \bar{Q}_{1a}. \end{aligned} \right\} \quad (103)$$

Die Bedingungen (101), (102) und (103) stellen die Übergangsbedingungen zwischen dem Innen- und Außenraum dar. Daraus folgen mit Hilfe der Gln. (77–100) Bedingungsgleichungen für die Integrationskonstanten. Die Ermittlung der Integrationskonstanten kann durch die Fehlerquadratmethode oder die Kollokationsmethode erfolgen. Da keine Orthogonalitätseigenschaften zwischen den Koeffizienten dieser Gleichungen bestehen, ist die erstgenannte Methode nur mit großem numerischen Aufwand durchführbar. Es wurde daher für diese Arbeit die Kollokationsmethode verwendet. Die numerischen Rechnungen wurden auf einer elektronischen Rechenanlage*) durchgeführt. Die Bedingungen am freien Rand sind schon bei der Aufstellung der Lösung für den Außenraum (Gl. (73)) berücksichtigt.

Da für $\alpha = \infty$ $w_a = \frac{RP}{2Et_a} (1 - \nu)$ und $\chi = 0$ ist,

$$\text{wird } B_{10} = B_{40} = 0. \quad (104)$$

*) Typ: Zuse Z 22 R.

4.5 Übergang zu Polarkoordinaten

$$\alpha = \infty, \quad c = 0, \quad h^2 = 0, \quad \beta = \vartheta \quad \text{und} \quad 2 h C_2 = kr.$$

Daraus wird

$$cer_{2n} = \cos 2n \vartheta, \quad cei_{2n} = 0, \quad Cer_{2n} = a ber_{2n}(kr),$$

$$Cei_{2n} = -a bei_{2n}(kr),$$

$$Mer_{2n} = a' her_{2n}(kr) \quad \text{und} \quad Mei_{2n} = -a' hei_{2n}(kr).$$

Da die Durchbiegung $w(r, \vartheta)$ und die Verdrehung $\chi(r, \vartheta)$ bei symmetrischer Belastung unabhängig von ϑ sind, ist nur $n = 0$ brauchbar. Dadurch erhalten wir für den Innenraum

$$\left. \begin{aligned} w_i(r) &= \frac{R^2 P (1 - \nu)}{2 E t_i} + A_1 ber(kr) + A_2 bei(kr), \\ \chi_i(r) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (105)$$

und für den Außenraum

$$\left. \begin{aligned} w_a(r) &= \frac{R^2 P (1 - \nu)}{2 E t_a} + B'_2 her(kr) + B'_3 hei(kr) \\ &= \frac{R^2 P (1 - \nu)}{2 E t_a} + B_2 Ker(kr) + B_3 Kei(kr), \\ \chi_a(r) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (106)$$

$a, a', A_1, A_2, B'_1, B'_2, B_1$ und B_2 sind Konstanten. *Ber, Bei, her, hei, Ker, Kei* sind die reellen und imaginären Teile der *Besselschen, Hankelschen* und *Kelvinschen* Funktionen. Die Gln. (105) und (106) sind die bekannten Lösungen der flachen Kugelschale in Polarkoordinaten. Die Querkräfte Q_1 ergeben sich aus den Gln. (86) und (96) zu

$$\left. \begin{aligned} Q_{1i} &= C_1 Ber'(kr) + C_2 Bei'(kr), \\ Q_{1a} &= D_1 Ker'(kr) + D_2 Kei'(kr), \end{aligned} \right\} \quad (107)$$

wobei C_1, C_2, D_1 und D_2 Konstanten sind. Die Gln. (107) wurden von *M. Esslinger* [2] für eine Kugelschale ohne und mit Loch angegeben.

4.6 Zahlenbeispiel

Es sei eine flache Kugelschale gemäß Abb. 1 mit folgenden Ausgangswerten berechnet:

$$P = 5 \text{ kp/cm}^2, \quad E = 2100 \text{ Mp/cm}^2, \quad \nu = 0,3, \quad R = 20 \text{ m}, \quad a = 4 b = 100 \text{ cm}, \\ t_i = 2 t_a = 6 \text{ cm}.$$

$$\text{Es folgt: } x_1 = 0,25509, \quad c = 96,33167 \text{ cm}, \quad h_a^2 = 2 h_i^2 = 1,29101 i.$$

Die Parameter $\lambda_{2n}(h^2) = a_{2n}(h^2)$ und die Koeffizienten $A_{2r}^{2n}(h^2)$ der Mathieuschen Funktionen $ce_{2n}(\beta, h^2)$ und $Ce_{2n}(x, h^2)$ wurden nach den Rekursionsformeln (15a) und der Normierung (14) ermittelt. Die Funktionen $Me_{2n}^1(x, h^2)$ wurden aus der Reihenentwicklung

$$Me_{2n}^1(x, h^2) = \frac{ce_{2n}(0, h^2) ce_{2n}(\frac{\pi}{2}, h^2)}{[A_0^{2n}(h^2)]^2} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{2n}(h^2) J_r(h e^{-x}) H_r^1(h e^x)$$

berechnet. Die Konvergenz dieser Reihe ist durch Zahlenbeispiele nachgewiesen, wobei sich schnelle und gleichmäßige Konvergenz für alle Werte α zeigte.

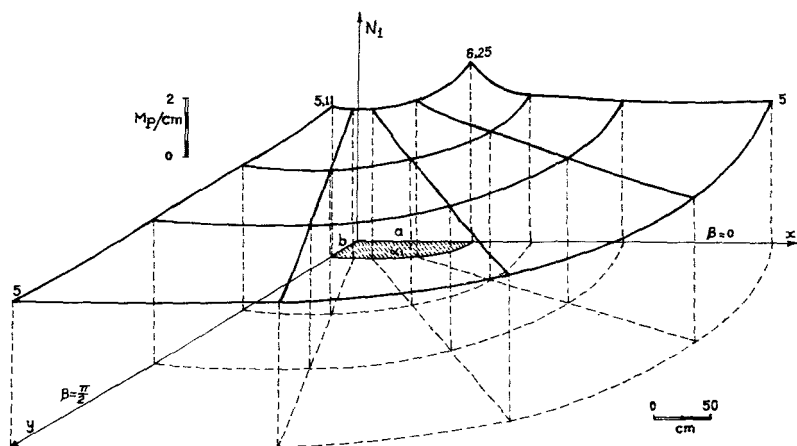
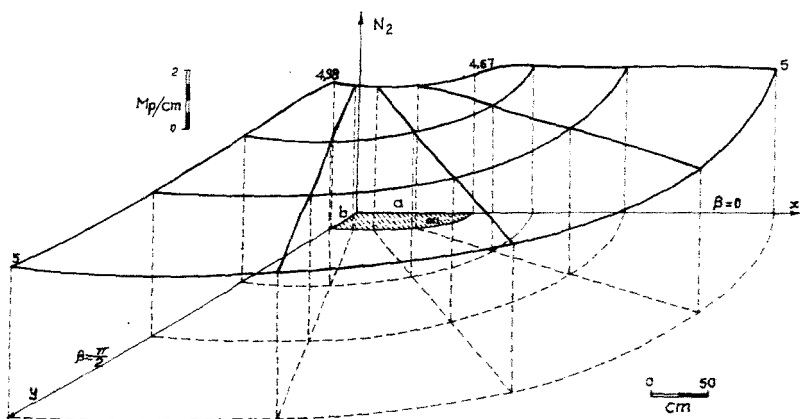
Die Integrationskonstanten A_{12n} bis A_{42n} und B_{12n} bis B_{42n} wurden aus den Reihengleichungen, entsprechend den Randbedingungen (101), (102) und (103) durch Koeffizientenvergleich ermittelt. Dabei ergab sich schon genügende Genauigkeit, wenn nur die beiden Reihenglieder $n=0$ und $n=1$ berücksichtigt wurden. Ferner liefern die Konstanten A_{22n} und A_{32n} bzw. B_{22n} und B_{32n} den Hauptteil der Beanspruchungen, während A_{12n} bzw. B_{12n} nur geringe Beiträge leisten.

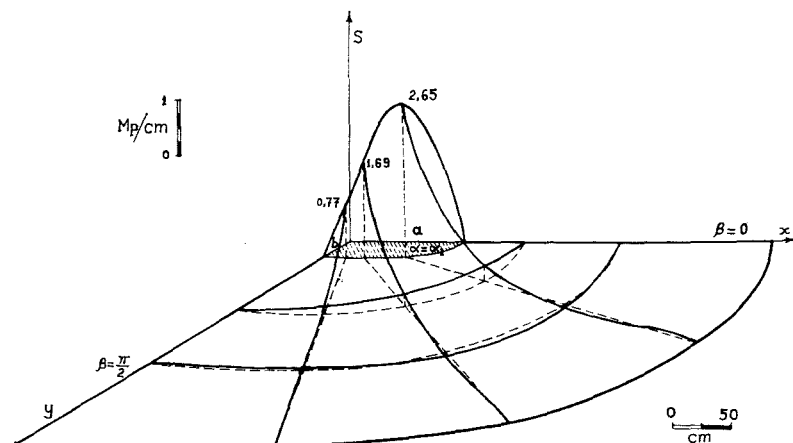
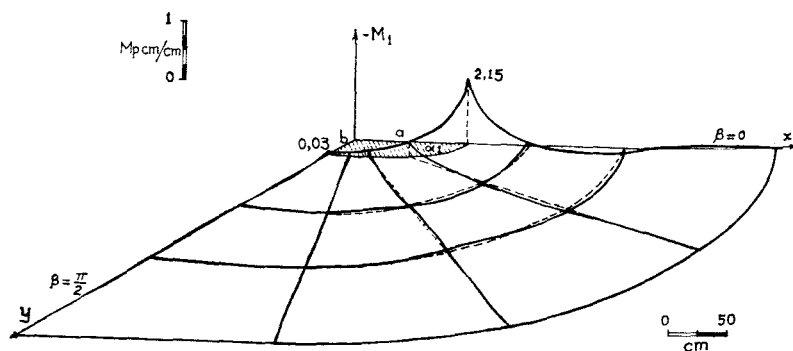
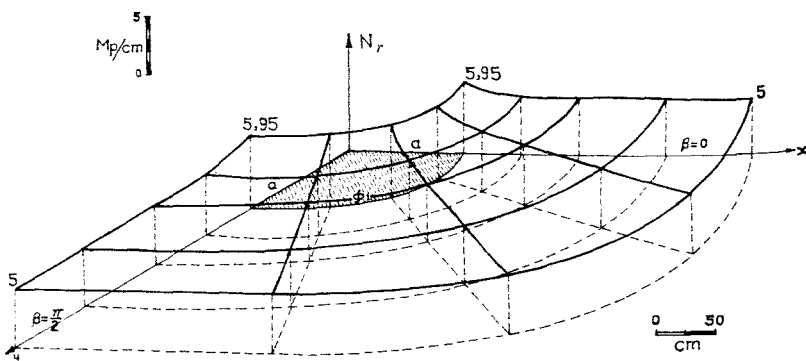
Hieraus folgt, daß wir zur Vereinfachung der Lösung auf die Konstanten A_{12n} bzw. B_{12n} verzichten können. Dadurch wird

$$\left. \begin{aligned} w_i &= \frac{R^2 P}{2 E t_i} (1 - \nu) + \sum_{n=0}^{\infty} A_{22n} (ce_{2n} Cer_{2n} - ce_{i2n} Ce_{i2n}) + \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} A_{32n} (ce_{2n} Ce_{i2n} + ce_{i2n} Cer_{2n}), \\ w_a &= \frac{R^2 P}{2 E t_a} (1 - \nu) + \sum_{n=0}^{\infty} B_{22n} (ce_{2n} Mer_{2n} - ce_{i2n} Me_{i2n}) + \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} B_{32n} (ce_{2n} Me_{i2n} + ce_{i2n} Mer_{2n}). \end{aligned} \right\} \quad (108)$$

Eine weitere Vereinfachung ergibt sich durch Beschränkung auf $n=0$ und 1. Der Fehler bei dieser Berechnung ist gering, besonders wenn der elliptische Kern klein ist.

Die Abbildungen 6 bis 9 zeigen den Verlauf der Beanspruchungen der Schalenmittelfläche der Kugelschale mit starrem elliptischen Kern. Abb. 10 stellt die Normalkraft N_r bei der gleichen Kugelschale mit starrer Kugelkappe ($r=a$) dar, und Abb. 11 zeigt die Hauptspannung σ_{\max} bei einer Scheibe mit starrem elliptischen Kern infolge allseitigen Zuges. Schließlich sind in den Tabellen 1, 2 und 3 die Verschiebungen und Beanspruchungen am Kernrand für die Kugelschale mit elliptischem Kern, bzw. Kreiskern und für die Scheibe mit elliptischem Kern angegeben.

Abb. 6. Normalkraft N_1 bei flacher Kugelschale mit starrem elliptischen Kern unter konstantem DruckAbb. 7. Normalkraft N_2 bei flacher Kugelschale mit starrem elliptischen Kern unter konstantem Druck

Abb. 8. Schubkraft S bei flacher Kugelschale mit starrem elliptischen Kern unter konstantem DruckAbb. 9. Biegemoment M_1 bei flacher Kugelschale mit starrem elliptischen Kern unter konstantem DruckAbb. 10. Normalkraft N_r bei flacher Kugelschale mit starrem Kreiskern unter konstantem Druck

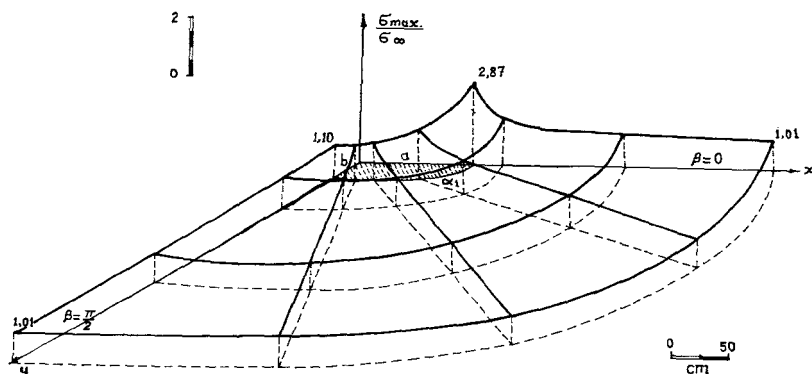
Abb. 11. Bezogene Hauptspannung σ_{max} bei einer Scheibe infolge allseitigen Zuges**Verschiebungen und Beanspruchungen am Kernrand**

Tabelle 1. Flache Kugelschale mit elliptischem Kern

β	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$
Starrer Kern					
u [cm]	$-1,256 \cdot 10^{-2}$	$-0,882 \cdot 10^{-2}$	$-0,622 \cdot 10^{-2}$	$-0,548 \cdot 10^{-2}$	$-0,475 \cdot 10^{-2}$
v [cm]	0	$3,652 \cdot 10^{-4}$	$3,913 \cdot 10^{-4}$	$2,473 \cdot 10^{-4}$	0
w [cm]	1,075	1,082	1,093	1,099	1,104
N_1 [Mp/cm]	6,248	5,425	5,223	5,165	5,111
N_2 [Mp/cm]	4,674	4,774	4,832	4,920	4,983
S [Mp/cm]	0	2,652	1,689	0,768	0
M_1 [Mpcm/cm]	-2,151	-0,412	-0,200	-0,043	-0,031
Q_1 [Mp/cm]	$-0,528 \cdot 10^{-1}$	$-0,775 \cdot 10^{-2}$	$0,182 \cdot 10^{-2}$	$0,822 \cdot 10^{-4}$	$-0,625 \cdot 10^{-2}$
Elastischer Kern					
u [cm]	$-0,164 \cdot 10^{-2}$	$-0,788 \cdot 10^{-3}$	$-0,308 \cdot 10^{-3}$	$-0,121 \cdot 10^{-3}$	$-0,065 \cdot 10^{-3}$
v [cm]	0	$0,435 \cdot 10^{-4}$	$0,235 \cdot 10^{-4}$	$0,132 \cdot 10^{-4}$	0
w [cm]	1,084	1,089	1,109	1,103	1,106
N_1 [Mp/cm]	5,474	5,231	5,128	5,056	5,024
N_2 [Mp/cm]	4,752	4,792	4,853	4,931	4,985
S [Mp/cm]	0	2,420	1,384	0,462	0
M_1 [Mpcm/cm]	-1,251	-0,278	-0,168	-0,036	-0,025
Q_1 [Mp/cm]	$-0,316 \cdot 10^{-1}$	$-0,088 \cdot 10^{-3}$	$1,911 \cdot 10^{-3}$	0,042	-0,055
Loch					
u [cm]	$1,991 \cdot 10^{-2}$	$0,781 \cdot 10^{-2}$	$0,756 \cdot 10^{-3}$	$0,489 \cdot 10^{-3}$	$0,489 \cdot 10^{-3}$
v [cm]	0	$4,185 \cdot 10^{-3}$	$3,412 \cdot 10^{-3}$	$1,789 \cdot 10^{-3}$	0
w [cm]	1,235	1,212	1,182	1,165	1,145
N_1 [Mp/cm]	0	0	0	0	0
N_2 [Mp/cm]	43,450	20,702	10,253	6,575	5,353
S [Mp/cm]	0	0	0	0	0
M_1 [Mpcm/cm]	0	0	0	0	0
Q_1 [Mp/cm]	0	0	0	0	0

Tabelle 2. Flache Kugelschale mit Kreiskern

	Starrer Kern	Elastischer Kern	Kreis-ausschnitt
N_r [Mp/cm]	5,950	5,620	0
N_θ [Mp/cm]	2,250	4,250	7,450
M_r [Mpcm/cm]	-2,460	-0,615	0
M_θ [Mpcm/cm]	-0,815	-0,320	3,850
Q_r [Mp/cm]	-0,050	-0,090	0

Tabelle 3. Scheibe mit elliptischem Kern

β	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$
Starrer Kern					
σ_x / σ_∞	2,870	1,610	1,210	1,150	1,100
$\sigma_\beta / \sigma_\infty$	1,080	2,420	2,810	2,860	2,780
$\tau_{\alpha\beta} / \sigma_\infty$	0	-0,852	-0,446	-0,196	0
Elastischer Kern					
σ_x / σ_∞	1,416	1,178	1,106	1,089	1,115
$\sigma_\beta / \sigma_\infty$	1,094	1,332	1,404	1,406	1,309
$\tau_{\alpha\beta} / \sigma_\infty$	0	-0,146	-0,077	-0,034	0
Loch					
σ_x / σ_∞	0	0	0	0	0
$\sigma_\beta / \sigma_\infty$	8,000	2,510	0,942	0,580	0,500
$\tau_{\alpha\beta} / \sigma_\infty$	0	0	0	0	0

4.7 Schlußbemerkungen

Der Vergleich zwischen den Bildern bestätigt die bekannte Tatsache (vgl. Withum [8]), daß die Störungen bei der Scheibe asymptotisch gegen Null gehen, dagegen bei der Schale in Form gedämpfter Schwingungen abklingen. Das Abklingen ist dabei in der Nähe des Kernes wesentlich stärker als bei der Scheibe. In weiterer Entfernung vom Kernrand sind jedoch immer noch geringfügige Spannungen vorhanden.

Man erkennt, daß die größten Beanspruchungen am Kernrand auftreten und die größten Längsspannungen bei $\beta = 0$ und π liegen. Die maximale Span-

nungserhöhung $\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_\infty} \right)$ bei der Scheibe ist größer als die Erhöhung von N_1 bei

der Schale, jedoch wird die Längsspannung an den Außenflächen der Schale infolge des Biegemomentes M_1 stark erhöht. Bei der Kugelschale mit elliptischem Loch ist zu erkennen, daß die Spannungserhöhung bei der Schale viel größer als bei der Scheibe ist, was zu erwarten ist, da die Längsspannung für die Kugelschale mit Kreis-ausschnitt größer als die für eine Scheibe ist.

Bei allen Fällen ist zu beachten, daß die Verschiebungen u und w sowie die Beanspruchungen N_1 , N_2 , M_1 , M_2 , Q_1 symmetrischen Verlauf in bezug auf die Achsen x , y haben, während die Verschiebung v und die Beanspruchungen S , Q_2 , M_{12} antimetrisch zu diesen Achsen verlaufen.

5. Zusammenfassung

Das Problem der Spannungstörungen in einer flachen Kugelschale mit elliptischem Kern unter konstantem Druck wurde mit Reihen *Mathieuscher* Funktionen gelöst. Dabei müssen für die Spannungszustände innerhalb und außerhalb des elliptischen Kernes verschiedene Lösungen aufgestellt werden. Beide Spannungszustände werden durch die Bedingungen miteinander verknüpft, daß die Verformungen und Beanspruchungen an der Berührungslinie übereinstimmen müssen. Die Arbeit schließt mit einem zahlenmäßigen Vergleich zwischen der Scheibe mit elliptischem Kern, der flachen Kugelschale mit Kreiskern und der flachen Kugelschale mit elliptischem Kern. Das wichtigste Ergebnis besteht dabei in der Erkenntnis, daß die Schale am ungünstigsten am elliptischen Kernrand im Bereich des großen Durchmessers beansprucht wird.

Literatur

- [1] *I. Doganoff*: Beitrag zur Berechnung der rechteckig begrenzten Kugelschale. Dissertation T. H. Hannover 1960.
- [2] *M. Esslinger*: Statische Berechnung von Kesselböden, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1952.
- [3] *W. Flüge*: Stresses in Shells, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1960.
- [4] *G. Kaiser*: Die Scheibe mit elliptischem Pflaster, Ing.-Arch. (1960), Bd. 30, S. 275 bis 287.
- [5] *McLachlan*: Theory and Application of Mathieu Functions, Oxford 1950.
- [6] *J. Meixner und F. W. Schäfke*: Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1954.
- [7] *C. L. Perry*: The Bending of Thin Elliptic Plates. Proc. of Symposia in Appl. Mathematics, (1950), S. 131—139.
- [8] *D. Wüthum*: Die Kreiszyinderschale mit kreisförmigem Ausschnitt unter Schubbeanspruchung. Dissertation T. H. Hannover, 1957.
- [9] *W. S. Wlassow*: Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendung in der Technik, Berlin 1958.
- [10] *G. N. Sawin*: The Stress Distribution in a Thin Shell with an Arbitrary Hole, Problems of Continuum Mechanics, Philadelphia, Pennsylvania 1961, S. 382—405.